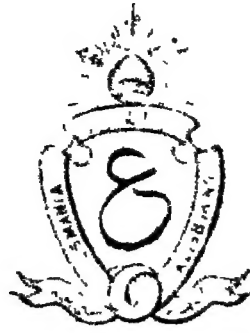


عطیہ سرکار دکن





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# علم مثلث مستوی

تصنیف

ای۔ ڈبلیو۔ ہارسن۔ ایس جی ڈی ایل۔ ایل۔ ڈی ایت۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن مرثیہ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکاری

۱۳۵۵ھ ۳۴۵ھ ۱۹۳۶ء

طبع و اشاعت: دارالکتاب، لاہور

# فہرست مضامین

## علم مثلث مستوی

### پہلا باب

### زاویہ مقداروں کی پیمائش

(۱۰)

صفحہ	مضمون	دفعات
۱	تہبید - کسی مقدار کے زاویہ کی تشکیل	۱
۲	زاویوں کی عددی پیمائش	۳ تا ۴
۴	زاویوں کی دائری پیمائش	۵ تا ۱۰
۵	دائری قوس کا طول	۱۱
۹	دائرہ کے قطاع کا رقبہ	۱۲
۱۲	پہلے باب پر مشالیں	
۱۵		

### دوسرا باب



صفحہ

وفات

مضمون

## خطوں کی پیمائش۔ ظل

۱۸

۱۶ تا ۱۳۔ خطوں کی پیمائش۔

۲۰

۱۔ ظل۔

## تیسرا باب

## دائرۃ تفاعل

۲۲

۱۸ تا ۲۱۔ دائرۃ تفاعلوں کی تعریفات۔

۲۷

۲۲ تا ۲۱۔ دائرۃ تفاعلوں کے درمیان رشتے۔

۳۰

۲۵۔ دائرۃ تفاعلوں کی قیمتوں کے حدود۔

۳۰

۲۶ تا ۲۹۔ دائرۃ تفاعلوں کے خواص۔

۳۵

۳۰۔ دائرۃ تفاعلوں کی دوریت

۳۶

۳۱۔ دائرۃ تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں۔

۳۹

۳۲۔ دائرۃ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر۔

۴۱

۳۳۔ وہ زاوئے جنکا دائرۃ تفاعل وہی ہے۔

۴۲

۳۴۔ بعض زاویوں کے دائرۃ تفاعل کا تعین۔

۴۶

۳۵ تا ۳۸۔ مقلوب دائرۃ تفاعل۔

۴۹

تیسرے باب پر مثالیں

## چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائرۃ تفاعل

۳۹ تا ۴۳۔ جیب اور جیب التمام کے لیے جمع اور تفریق کے ضابطے۔ ۵۳

صفحہ	مضمون	دفعات
۶۰	۴۴ تا ۴۵ - دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لیے ضابطے -	
۶۶	۴۶ - حماس اور حماس التمام کے لیے جمع اور تفریق کے ضابطے -	
۶۷	۴۷ - مختلف ضوابط -	
۷۰	۴۸ - تین زاویوں کے لیے جمع کے ضابطے -	
۷۱	۴۹ - زاویوں کی کسی تعداد کے لیے جمع کے ضابطے -	
	۵۰ - جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب	
۷۴	یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا -	
۷۸	۵۱ - ضعفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لیے ضوابط -	
	۵۲ - جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لیے ضعفی زاویوں کی	
۸۰	جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں چلے -	
۸۲	۵۳ - منقلب تفاعلوں کے درمیان رشتے -	
۸۳	۵۴ - ضابطوں کے ہندسی ثبوت -	
	چوتھے باب پر مثالیں	



## پانچواں باب

### تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۹۶	۵۵ تا ۶۳ - ضوابط -
	۶۴ - دئے ہوئے زاوے کے ایک ثلث کے دائری
	تفاعل -
۱۰۷	۶۵ تا ۶۶ - بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعین -
۱۱۱	پانچویں باب پر مثالیں -
۱۱۶	

صفحہ

مضمون

دفعات

## چھٹا باب مختلف مسئلے

۱۲۳	۶۷ - تمہید -
۱۲۳	۶۸ - متانثلات اور استحالہ -
۱۳۱	۶۹ - مساواتوں کا حل -
۱۳۵	۷۰ - اسقاط -
۱۳۷	۷۱ - مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے -
۱۴۱	۷۲ - اعظم اور اقل قیمتیں - لاتساویات -
۱۴۴	۷۳ - مساواتوں کے استنباطی نظام -
۱۴۷	۷۴ تا ۷۷ - سلسلوں کو جمع کرنا -
۱۵۴	پچھتے باب پر مثالیں -

## ساتواں باب

### ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلاتا

۱۷۲	۷۸ تا ۷۹ - جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ -
۱۷۵	۸۰ تا ۸۳ - جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلہ -
۱۷۹	۸۴ - تحت ضعیفی زاویوں کے دائری تفاعل -
۱۸۱	۸۵ - مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل -
۱۸۷	۸۶ تا ۹۱ - اجزائے ضربی -

صفحہ

۱۹۶

مضمون

ساتویں باب پر مثالیں۔

دفعات

## آٹھواں باب

ایک زاوے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

۲۰۲

۹۵ تا ۹۶ - مسائل -

۲۰۷

۹۶ - یولر کا حاصل ضرب -

۲۱۱

۹۷ تا ۹۸ - بعض جملوں کی انتہائیں -

۹۹ - زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سہلے

۲۱۳

اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں -

۲۱۹

۱۰۰ - مثلثی اور جبری متاثرات کے درمیان ایک رشتہ

۲۲۰

آٹھویں باب پر مثالیں -

## نواں باب

مثلثی جدولیں

۲۲۶

۱۰۱ - تمہید -

۲۲۷

۱۰۲ تا ۱۰۵ - طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا -

۲۳۳

۱۰۶ - عددی جدولوں کی تصدیق -

۲۳۴

۱۰۷ - ماسوں اور قاطعوں کی جدولیں -

۲۳۴

۱۰۸ - سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا -

۲۳۷

۱۰۹ - لوکارچی جدولیں -

صفحہ	مضمون	دفعات
۲۳۷	مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال -	۱۱۰ تا ۱۱۱
۲۴۲	متناسب اجزاء کا اصول -	۱۱۲ تا ۱۱۳
۲۴۹	لوگاریتمی اعمال حساب کے لیے مضبوطوں کو موزوں بنانا -	۱۱۵ تا ۱۱۷

## دسواں باب

### مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۲۵۳	مسائل -	۱۱۸ تا ۱۲۲
۲۶۰	مثلث کا رقبہ -	۱۲۵
۲۶۱	مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات -	۱۲۶
۲۶۴	کثیرالاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے -	۱۲۷ تا ۱۲۸
۲۶۵	کثیرالاضلاع کا رقبہ -	۱۲۹
۲۶۷	دسویں باب پر مثالیں -	

## گیارہواں باب

### مثلثوں کا حل

۲۷۴	تہبہ -	۱۳۰
۲۷۴	قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۱ تا ۱۳۳
۲۷۸	غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل -	۱۳۴ تا ۱۴۰

صفحہ	مضمون	دفعات
۲۸۹	کثیر الاضلاعوں کا حل -	۱۴۱ تا ۱۴۲
۲۹۳	بلندیاں اور فاصلے -	۱۴۵ تا ۱۴۹
۳۰۰	گیا رہویں باب پر مثالیں -	

## بارہواں باب

### مثلثوں اور ذواربعتہ الاضلاعوں کے خواص

۳۱۳	تہید -	۱۵۰ -
۳۱۳	مثلث کا حاطط دائرہ	۱۵۱ -
۳۱۴	مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے -	۱۵۲ تا ۱۵۴
۳۲۱	خطوط وسطی -	۱۵۵ -
۳۲۳	زاویوں کے نصف	۱۵۶ -
۳۲۴	مثابث یا میں -	۱۵۷ -
۳۲۶	خاص نقطوں کے درمیان فاصلے -	۱۵۸ -
۳۳۰	مثلث کے رقبہ کے لیے جملے -	۱۵۹ -
۳۳۱	مثلثوں کے خواص -	۱۶۰ تا ۱۶۳
۳۳۴	ذواربعتہ الاضلاعوں کے خواص -	۱۶۴ تا ۱۶۷
۳۴۲	منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص -	۱۶۸ -
۳۴۳	مثالیں -	۱۶۹ -
۳۵۰	بارہویں باب پر مثالیں	

## تیرہواں باب

صفحہ	مضمون	دفعات
	<b>ملف اعداد</b>	
۳۷۰	۱۷۰۔ تمہید۔	
۳۷۰	۱۷۱ تا ۱۷۴۔ ملف اعداد کی ہندسی تعبیر۔	
۳۷۴	۱۷۵ تا ۱۷۷۔ ملف عددوں کی جمع۔	
۳۷۷	۱۷۸۔ ملف عددوں کی ضرب۔	
۳۷۹	۱۷۹۔ ایک ملف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا۔	
۳۸۱	۱۸۰ تا ۱۸۵۔ ملف عددوں کی قوتیں۔	
۳۸۸	۱۸۶ تا ۱۸۷۔ ڈیموار کا مسئلہ۔	
۳۹۳	۱۸۸۔ اجزائے ضربی۔	
۳۹۶	۱۸۹۔ دائرہ کے خواص۔	
۳۹۸	۱۹۰۔ مثالیں۔	
۴۰۰	تیرہویں باب پر مثالیں۔	

## چودھواں باب

### لامتناہی سلسلوں کا نظریہ

۴۰۷	۱۹۱۔ تمہید۔	
۴۰۷	۱۹۲ تا ۱۹۶۔ حقیقی سلسلوں کا استدقاق۔	
۴۱۷	۱۹۷۔ ملف سلسلوں کا استدقاق۔	
۴۲۰	۱۹۸۔ سلسل تقابل۔	
۴۲۱	۱۹۹ تا ۲۰۱۔ یکساں استدقاق۔	
۴۲۸	۲۰۲۔ سلسلہ ہندسیہ۔	

صفحہ	مضمون	دفعات
۴۳۰	صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے -	۲۰ تا ۲۰۳
۴۴۲	دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق -	۲۰۹
۴۴۴	دوہرے سلسلوں کا استدقاق -	۲۱۰
۴۴۹	مسئلہ ثنائی -	۲۱۱ تا ۲۱۲
۴۵۸	ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل -	۲۱۳ تا ۲۱۴
۴۶۹	کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں -	۲۱۸ تا ۲۱۹
۴۷۲	جیب اور جیب التمام کی قوتوں کو ضعفی زاویوں کی جیب اور جیب التمام میں بیان کرنا -	۲۲۰ تا ۲۲۲

## پندرہواں باب

### قوت نمائی تفاعل - لوکارتم

۴۷۹	قوت نمائی سلسلہ -	۲۲۳ تا ۲۲۴
۴۸۶	دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ -	۲۲۸
۴۸۷	دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں -	۲۲۹ تا ۲۳۰ (د)
۴۹۲	قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت -	۲۳۱ تا ۲۳۲
۴۹۴	دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف -	۲۳۳ تا ۲۳۴
۵۰۲	طبعی لوکارتم -	۲۳۸ تا ۲۳۹
۵۰۴	عام قوت نما تفاعل -	۲۴۰ تا ۲۴۱
۵۰۹	کسی اساس پر لوکارتم -	۲۴۵
۵۱۰	عام ترین لوکارتم -	۲۴۶ تا ۲۴۸
۵۱۳	لوکارتمی سلسلہ -	۲۴۹ تا ۲۵۰



صفحہ	مضمون	دفعات
۵۱۹	گرگیوری کا سلسلہ -	۲۵۱
۵۲۱	دائرہ کی تربیع -	۲۵۱ (۱) تا ۲۵۱ (ج)
۵۳۰	دائرہ کی تقریبی تربیع -	۲۵۲ تا ۲۵۲
۵۳۳	مثلثی متاثرات -	۲۵۵
۵۳۵	سلسلوں کا جمع کرنا -	۲۵۴ تا ۲۵۴
۵۴۰	پندرہویں باب پر مثالیں -	

## سولہواں باب

### زائدی تفاعلات

۵۵۳	تہمید -	۲۵۸
۵۵۳	زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے -	۲۵۹
۵۵۵	جمع کے ضابطے -	۲۶۱ تا ۲۶۱
۵۵۶	ضعفوں یا تحت ضعفوں کے لیے ضابطے -	۲۶۲
۵۵۶	زائدی تفاعلوں کے لیے سلسلے -	۲۶۵ تا ۲۶۳
۵۵۸	زائدی تفاعلوں کی دوریت -	۲۶۶
۵۵۹	تمام الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ -	۲۶۰ تا ۲۶۶
۵۶۶	مقت و دلیلوں کے دائری تفاعلوں کے لیے جملے -	۲۶۹
۵۶۶	مقت و دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل -	۲۶۴ تا ۲۶۴
۵۷۱	مقلوب زائدی تفاعل -	۲۶۷ تا ۲۶۵
۵۷۳	کعبی مساواتوں کا عمل -	۲۷۷
۵۷۵	گڈرینی تفاعل کی جدول -	۲۷۸
۵۷۷	سولہویں باب پر مثالیں -	

صفحہ

مضمون

دفعات

## سترہواں باب

### لامتناہی حاصل ضرب

- ۲۷۹ تا ۲۸۱ - لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق - ۵۸۰
- ۲۸۲ تا ۲۹۲ - جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا - ۵۸۹
- ۲۹۲ (۱) - قوت نما قاطع کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا - ۶۰۸
- ۲۹۳ تا ۲۹۵ - ماس، ماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کے لیے جملے - ۶۰۹
- ۲۹۶ تا ۲۹۹ - دلیل کی قوتوں میں ماس، ماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کو بیان کرنا - ۶۱۷
- ۳۰۰ - لوکار تھی جیب اور جیب التمام کے لیے جملے - ۶۲۷
- ۳۰۱ - مثالیں - ۶۳۳
- سترہویں باب پر مثالیں - ۶۳۶

## اٹھارواں باب

### سلسل کسیر

- ۳۰۲ تا ۳۰۴ - II کے غیر منطوق ہونے کا ثبوت - ۶۴۵
- ۳۰۴ - دو طوی ہندی سلسلوں کے خارج قیمت کا استحالہ - ۶۴۷
- ۳۰۵ - پولر کا استحالہ - ۶۴۹
- اٹھارویں باب پر مثالیں - ۶۴۹
- متفرق مثالیں - ۶۵۱

22

23

# علم مثلث مستوی

## پہلا باب

### زاوی مقداروں کی پیمائش

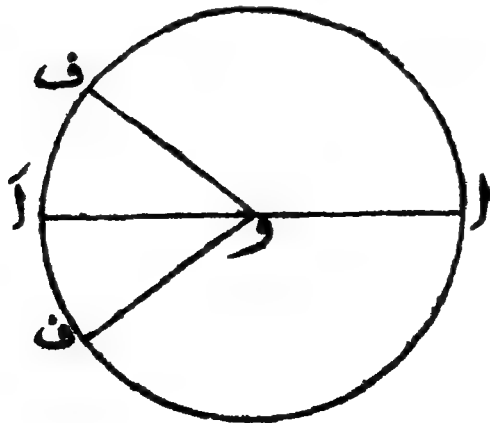
(۰۰)

۱۔ علم مثلث مستوی کا اولین مقصد، مستوی مثلثوں کو حل کرنیکا طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاویے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقداریں دیجائیں اور ان دئے ہوئے اجزاء میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعین کرنا ممکن ہے، اس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ علم مثلث مستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاوی مقدار کے بعض تفاعلوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اس طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں ان دائری تفاعلوں کے خواص کی تحقیق اور تجلیلی اور ہندسی تحقیقاتوں میں ان خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رکھتے۔

## کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ ہر اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب سب دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے مقاصد کے لئے زاویہ مقدار کے تخیل کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہو جائیں۔

فرض کرو کہ  $OA$  ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم  $OF$  جو ابتداء میں  $O$  پر منطبق ہوتا ہے نقطہ  $A$  کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ  $FOA$  کی تکوین کرتا ہے اور جب  $OF$  محل  $OA$  پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کر چکتا ہے اور پھر اگر وہ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر  $A$  کے  $OA$  پر منطبق ہوتا ہے، اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  $OF$  اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور  $O$  کے گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاویے مکمل کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل  $OF$  میں یک جا جائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کر چکا ہوگا جو  $OF$  کے محل کے



مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے لیکن یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ مرتبہ مثبت ہے جبکہ  $\angle$  مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ  $\angle$  وف اسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویہ کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب  $\angle$  وف، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:- اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چلتی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی، لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاویے خبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل اوپر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہمیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقعہ گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

۳۔ فرض کرو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل)  $\angle$  وف (3)

ہے۔ وہ زاویہ جو اس نے محل  $\angle$  وف سے محل  $\angle$  وف تک گھومنے میں مرتبہ کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ ان مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے خبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم ان تمام زاویوں کو جو خطوط  $\angle$  وف سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاویے کہیں گے اور انکو  $(\angle \text{وا}, \angle \text{وف})$

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (دراؤف) میں سے مقدار اچھوٹے سے چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ (دراؤف) ہے، اور باقی سب زاویے 'زاویے (دراؤف) کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعیف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

## زاویوں کی عددی پیمائش

۴۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے کیا مراد ہے دوسرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیے جو مستقل مقدار کا اختیاری طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش ان نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی معتدلات کے زاویے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسروں سے تعبیر ہوتے ہیں اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے عام طور پر جو اکائی مستقل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نو دواں حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ درجوں کے زاویہ کو ڈی سے تعبیر کیا جاتا ہے، م دقیقوں کے زاویہ کو م سے اور ثانیوں کے زاویہ کو ثانی سے۔ اس طرح زاویہ ڈی م ثانی سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں درجے ۴۰ دقیقے ۶۰ ثانیہ شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

$$\frac{90}{40 \times 60 \times 60} + \frac{60}{40 \times 60} + \frac{90}{40} \text{ کے مساوی ہے۔}$$

زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً  
 زاویہ  $23^{\circ} 14' 54''$ ، زاویہ قائمہ کا  $\frac{12}{90} + \frac{14}{60} + \frac{54}{3600}$  ہے۔

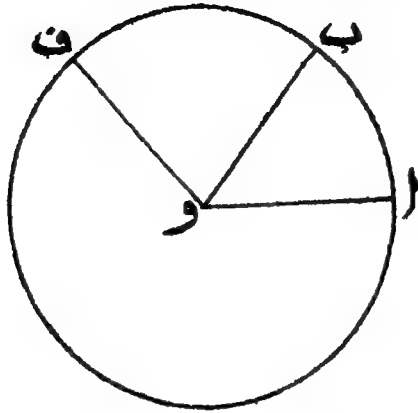
(4) یہ تجویز پیش تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گ م ن لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ  $13^{\circ} 42' 54''$  زاویہ قائمہ کے  $13.7111$  کے مساوی ہے۔ لیکن یہ نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تا وقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے علاوہ کوئی اور نہ کی جائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جاسکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں اور یہ امر وقت پیمائش میں تغیر کرنے کو منظم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا ایک گھنٹہ طول بلد کے  $\frac{1}{4}$  مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چار قائمہ زاویوں کی ۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

## زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص عملی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ ہولت بخش ہے کسی دائرہ میں جس کا مرکز وہ ہے فرض کرو کہ اب ایک توس ہے جس کا طول





دائرے  
کے نیم قطر  
کے مساوی  
ہے تو ہم  
ثابت  
کریں گے  
کہ زاویہ  
ا و ب

کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی اکائی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو اکائی زاویہ کے ساتھ ہو اور یہ نسبت زاویہ کا دائری ناپ کہلائگی۔

۴۔ اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے۔

(ا) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے عادی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (۱) (قلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ میں سے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (ا) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس ا ب}}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ ا و ب}}{\text{ہم قائمہ زاویہ}}$$

چونکہ قوس ا ب دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک



کے اہم مقامات تک صحیح محبوب کی ہے۔  $\frac{1}{11}$  کی قیمت اعشاریہ کے ۱۲۱ مقامات تک حاصل کیجا چکی ہے۔

۹۔ زاویہ قائمہ کا دائری ناپ  $\frac{1}{2}$  ہے، اور دو قائمہ زاویوں کا  $\frac{1}{4}$ ، اور اب ہم درجوں میں دئے ہوئے کسی زاویہ کا دائری ناپ معلوم کر سکتے ہیں، اور اس کے برعکس نیم قطری میں دئے ہوئے کسی زاویہ کو درجوں میں بیان کر سکتے ہیں؛ اگر ایک زاویہ میں  $\frac{1}{2}$  درجے ہوں اور

اس کا دائری ناپ  $\frac{1}{2}$  ہو تو  $\frac{1}{2} = \frac{1}{180}$  کیونکہ ان میں سے ہر ایک نسبت

اس نسبت کو ظاہر کرتی ہے جو دئے ہوئے زاویہ کو دو قائموں کے ساتھ

ہے؛ پس درجوں کے زاویہ کا دائری ناپ  $\frac{1}{180}$  دہے اور دائری ناپ

$\frac{1}{2}$  کے زاویہ میں درجوں کی تعداد  $\frac{1}{2} \times 180$  ہے، اگر زاویہ درجوں دقیقوں

اور ثانیوں میں دیا جائے بیسے  $\frac{1}{2}$  تو اس کا دائری ناپ یہ ہے

$$(د + \frac{1}{2} \times 60 + \frac{1}{2} \times 60 \times 60) \times \frac{1}{180}$$

ا کا دائری ناپ  $0.0002908882...$  ہے، ا کا

اور آ کا  $0.00000484813...$

۱۰۔ قوس الف کے محاذی دائرہ کے مرکز پر کے زاویہ الفوف

کا دائری ناپ

قوس الف

دائرہ کا نصف قطر

On the calculation of the value of the theoretical unit angle to a great number of places.

لے دیکھو Grunert's Archiv جلد اول ۱۸۴۱ء۔

کے مساوی ہے، کیونکہ یہ نسبت  $\frac{\text{توس اف}}{\text{توس اب}}$  یعنی  $\frac{\text{زاویہ اوف}}{\text{زاویہ اب}}$  کے مساوی ہے۔

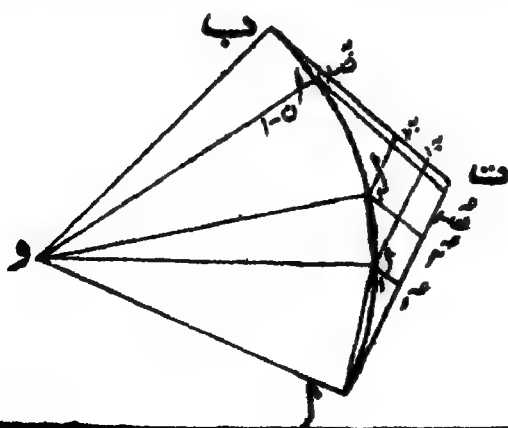
قوس اف پورے محیط سے بڑی ہو سکتی ہے اور اس کو مثبت یا منفی طور پر ناپا جاسکتا ہے اس سمت کی بوجب جس میں وہ ابتدائی نقطہ اسے ناپی گئی ہے؛ اس طرح کسی مقدار کے زاویہ کا دائری ناپ وہ نسبت ہے جو اس قوس کے طول کو جس کے محاذی زاویہ بنتا ہے دائرے کے نیم قطر کے ساتھ ہے۔ نیم قطر والے دائرہ کی قوس کا طول رطہ ہوتا ہے جبکہ ط اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جو اس قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا پورا محیط  $2\pi$  رہے۔

## دائری قوس کا طول

(7)

۱۱۔ اوپر یہ مان لیا گیا ہے کہ دائری قوس کا طول وجود رکھتا ہے اور قوس کی عددی پیمائش ہو سکتی ہے، اس امر کی اب تحقیق کیا جائے گی۔ طول کا اصلی تخیل ایک خطی قطعہ کا تخیل ہے یعنی خط مستقیم کا ایک محدود حصہ، اور منحنی کی قوس کے طول (مثلاً دائری قوس کا طول) کے تخیل کو اس سے ماخوذ سمجھنا چاہیے۔ ہم تسلیم کر لیں گے کہ خط مستقیم کے ایک دے ہوئے محدود حصہ کا طول وجود رکھتا ہے اور اسے ایک محدود منطق یا غیر منطق حد سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

ہے جو طول کی کسی  
مقررہ اکائی پر منحصر  
ہوتا ہے۔ اب دائری  
قوس اب کے  
طول کو معلوم کرنے  
کے لئے ہم منبیل



عمل کرتے ہیں :- فرض کرو کہ قوس  $AB$  متعدد نقطوں  $A, P, Q, R, S, \dots, B$  پر تقسیم کی گئی ہے، اندرونی نابند کثیر ضلعی  $APQR \dots$  اور  $AB$  پر غور کرو۔ اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ  $AP + PQ + QR + \dots + RS + SB$  کی ایک محدود قیمت  $F$  ہے۔ پھر قوس  $AB$  کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی  $APQR \dots$  بناؤ جس میں  $N$  کن اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی  $APQR \dots$  کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو، فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ  $F$  ہے۔ اسی طرح قوس  $AB$  کی متواتر تقسیم و تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک قواتر ملتا ہے جس کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد  $F, F, F, \dots$  کے ایک قواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ قواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اگر عدد  $F$  کی ایک معین انتہا  $L$  ہو جو قوس  $AB$  کی متواتر تقسیم و تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اس شرط کے تحت ہو کہ  $F$  کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ  $N$  لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس  $AB$  کا طول  $L$  ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا  $L$  موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر  $AB$  ج ایک قوس ہو اور  $AB, B, C$  کے طول معین ہوں تو  $ABC$  کا طول بھی معین ہوگا، اور  $AB, B, C$  کا طول قوسوں  $AB, B, C$  کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر ضلعیوں کے اس مخصوص قواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس قہتر کے

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ ان نابند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو  
 $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$  سے تعبیر کر کے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  
 $ف_۱ > ف_۲ > ف_۳ > ... > ف_n$  ...

کیونکہ مبادی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $ل_۱$ ،  $ل_۲$ ،  $ل_۳$ ، ...،  $ل_n$  میں  $ل_۱$  اور  $ل_۲$  کو طے کرنے والے ایک نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے نیز اعداد  $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$  سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس  $ا ب$  کے سروں  $ا ب$  پر  $ماس ت ا$ ،  $ت ب$  ہیں،  $ب ت$  کے متوازی  $ل_۱ م$ ،  $ل_۲ م$ ،  $ل_۳ م$ ، ...،  $ل_n م$  کھینچو اور میسرز  $ل ت$  کے متوازی  $ل م$ ،  $ل م$ ،  $ل م$ ، ...،  $ل م$  کھینچو۔

$$ل_۱ > ل_۲ > ل_۳ > ... > ل_n + ل_۱ م + ل_۲ م + ل_۳ م + ... + ل_n م$$

اور  $ل_۱ م > ل_۲ م > ل_۳ م > ... > ل_n م$  وغیرہ

$$ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ... + ل_n > ل_۱ م + ل_۲ م + ل_۳ م + ... + ل_n م$$

$$ف_n > ل ت + ب ت$$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بموجب، چونکہ

عددوں  $ف_۱، ف_۲، ...، ف_n$  کا قوتار ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد

والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ اسلئے قوتار کی ایک انتہا  $ل$  ہے ایسی کہ اگر صد ایک اختیاری مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو  $ل$  کی ایک خاص قیمت  $ل$  ایسی دریا ہو سکتی ہے کہ اس سے بڑی  $ل$  کی تمام قیمتوں کے لئے  $ف_n$   $ل$  سے







کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طو لوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو مرکز پر ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ دو دائرے ہیں جن کے قطر  $QR$  اور  $Q'R'$  ہیں اگر دو متشابه کثیر ضلعی ان دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متشابه مستقیم الاضلاع اشکال کے خواص کی بنا پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر الاضلاعوں کے گھیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو  $QR$  اور  $Q'R'$  میں ہے۔ اب دائروں کے محیط ہر اور قطر کو ان انتہاؤں کے برابر سمجھا جاسکتا ہے جو کثیر الاضلاعوں کے دو دائروں کے گھیروں  $Q$ ،  $Q'$ ،  $R$ ،  $R'$  کی ہیں جبکہ  $Q$  کے متناظر کثیر ضلعی  $Q$  کی ہر قیمت کے لئے، اس کثیر ضلعی کے متشابه ہو جو  $Q$  کے جواب میں ہے۔ اب چونکہ  $Q$ ،  $Q' = Q$  :  $Q$  :  $Q'$  اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $Q$  کی انتہا کو  $Q$  کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت  $Q$  :  $Q'$  کے مساوی ہے اور اس لئے

$$Q : Q' = Q : Q'$$

### دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۳۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز  $O$  ہے۔ اس کی کسی قوس  $AB$  سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ مثلثوں  $AOB$ ،  $BOC$ ،  $COA$ ، ... اور  $AB$  کے رقبوں کے مجموعے کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی  $AOB$ ،  $BOC$ ،  $COA$ ، ... اور  $AB$  کے ضلعوں کی تعداد لا انتہا بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱) میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

میں عدد کے برابر ہے۔  
 فرض کرو کہ وہ سے ضلعوں  $ا_۱، ا_۲، ... ا_n$  ب پر عمود کھینچے  
 گئے ہیں اور ان کے طول  $ق_۱، ق_۲، ... ق_n$  ہیں، تب مثلثوں کے  
 رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} (ق_۱ \times ا_۱ + ق_۲ \times ا_۲ + ... + ق_n \times ا_n) \text{ (ب)}$$

اور یہ مجموعہ،  $\frac{1}{2} ق \times ف$  اور  $\frac{1}{2} ق \times ف_n$  کے درمیان واقع ہوتا  
 ہے جہاں  $ق$  اور  $ق$  عددوں  $ق_۱، ق_۲، ... ق_n$  میں سے علی الترتیب  
 بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور  $ف$   
 کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔  $ف_n$  کی انتہا موجود ہے کیونکہ  
 یہ قوس  $ا_۱$  کا طول ہے۔ نیز عددوں  $ق_۱، ق_۲، ... ق_n$  کی ایک ہی انتہا ہے  
 اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے، کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں  
 کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس  
 قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر اور قوس  
 $ا_۱$  کے طول  $ر$  کے نصف حاصل ضرب کے مساوی ہے، جہاں  
 $ر$ ، زاویہ  $ا_۱$  کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ  $ا_۱$  =  
 $\frac{1}{2} ر^2$  - پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو محدود کرنیوالی  
 قوس پورا محیط ہے؛ پس پورے دائرہ کا رقبہ  $\pi ر^2$  ہے۔

## باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمائش کی اکائی کہا جونی چاہئے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا  
 عددی ناپ اس فرق کے مساوی ہو جسے جو درجوں اور دائری ناپ  
 میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناپ، اکائیوں (۱، ۲، ۳) کے لحاظ سے ۱، ۲، ۳ کی نسبت میں ہوں تو زاوے معلوم کرو۔  
 ۳۔  $n$  ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے ایک زاوے میں درجوں کی تعداد معلوم کرو (۱۱)

(۱) جبکہ وہ محذب ہو، (۲) جبکہ اس کا گھیرا اندرونی دائرہ کو مرتبہ احاطہ کرے۔

۴۔ ایک مثلث کے دو زاوے ۲، ۵، ۳، ۵، ۱، ۴، ۲، ۵ ہیں تیسرا زاویہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۴ میل ہے اس کی اس قوس کا طول اعشاریہ کے پانچ مقامات تک معلوم کرو جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر اس کا زاویہ بنتا ہے۔

۶۔ ایک زاوے کو مرتبوں اور درجوں میں ناپا گیا ہے اور معلوم ہوا کہ ان کا فرق  $\frac{22}{11}$  زاوے کا دائری ناپ کے مساوی ہے۔ زاویہ معلوم کرو۔

۷۔ ایک مستوی چار ضلعی کے زاوے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑے زاویے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق ایک زاویہ قائمہ ہے۔ ہر زاویہ کو درجوں میں ناپو اور نیز دائری ناپ میں۔

۸۔ دو مثلثوں میں سے ہر ایک کے زاوے سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، ایک مثلث کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ دوسرے مثلث کے چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے اور ان کے بڑے سے بڑے زاویوں کا مجموعہ ۲۴۰ ہے۔ زاویوں کا دائری ناپ معلوم کرو۔

۹۔ اگر ۴ فٹ قطر کے ایک دائرہ کی ۱۰ فٹ طول کی قوس ۳۴° ۲۲' کا زاویہ مرکز بنائے تو ۲۲ کی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔  
 ۱۰۔ دو منتظم شکلیں معلوم کرو ایسی کہ ایک کے ایک زاوے کے درجوں کی تعداد کو دوسرے کے ایک زاوے کے درجوں کی تعداد سے دہری

نسبت ہو جو ایک کے ضلعوں کی تعداد کو دوسرے کے ضلعوں کی تعداد سے ہے۔  
 ۱۱۔ اب ج ایک مثلث ہے ایسا کہ جب اس کے ہر زاویہ کو یکے بعد دیگرے پیمائش کی اکائی قرار دیا جاتی ہے اور دوسرے دو زاویوں کے مجموعہ کے ناپ معلوم کئے جاتے ہیں تو یہ ناپ سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ مثلث کے زاویے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ نیز ثابت کر دو کہ ان میں سے من ایک زاویہ زاویہ قائمہ کے  $\frac{1}{2}$  سے بڑا ہو سکتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کر دو کہ متکمل کثیرالاضلاعوں کے گیارہ اور صرف گیارہ زوج ایسے ہیں کہ ہر زوج میں ایک کثیرالاضلاع کے ایک زاویہ کے درجوں کی تعداد دوسرے کے ایک زاویہ میں مرتبوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ نیز یہ ثابت کر دو کہ صرف چار زوج ایسے ہیں جن میں یہ زاویے صحیح عددوں سے بیان ہوتے ہیں۔

۱۳۔ سورج کا فاعل ہری زاویہ قطر نصف درجہ ہے۔ یہ دیکھا گیا کہ ایک سیارہ اسکی قرص پر سے ایک خط مستقیم میں جو قرص کے مرکز سے اس کے نصف قطر کے  $\frac{2}{5}$  فاصلہ پر ہے سیدھا گزر جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ سیارہ کے

راستہ کے اس محدود حصہ کا سورج پر جو ظل پڑتا ہے اس کے محاذی زمین پر  $\frac{\pi}{250}$  کا زاویہ بنتا ہے۔

## دوسرا باب

### خطوں کی پیمائش نل

۱۳۔ اگر ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر جسے دونوں جانب لانا ہوتا ہو طویل فرض کیا جاسکتا ہے ایک دیا ہوا طول کسی مفروضہ نقطہ سے ناپنا مطلوب ہو تو یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کس سمت میں یہ دیا ہوا طول ناپا جائے۔ ابہام سے بچنے کے لئے ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خط مستقیم پر ایک سمت میں ناپے ہوئے طول مثبت عدد سے تعبیر ہونگے اور اس لئے اسکی مخالف سمت میں ناپے ہوئے طول منفی عدد سے۔ پس کسی ایسے خط میں مثبت سمت کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ شکل میں فرض کرو کہ

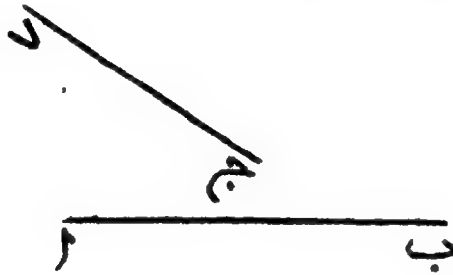
ج      ب      ا

ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خطوط جو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپے جائیں مثبت ناپ رکھتے ہیں، پس طول (ا ب) کو مثبت شمار کیا جائیگا اور طول ب (ا کو منفی یعنی اب = -ب)۔

۱۴۔ اگر خط مستقیم پر کوئی تیسرا نقطہ ج ہو تو اب = (ا ج + ج ب) کیونکہ اگر ج (جیسا کہ شکل میں ہے) ب سے پرے واقع ہو تو خط ج ب منفی ہے اور اسلئے اس کی عددی قیمت، (ا ج) کی قیمت میں سے

تفریق ہو جاتی ہے۔ اگر متعدد خطوط مستقیم ہوں جو ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے تکوین پائیں جو ۱ سے نکلتا ہے اور اپنی حرکت ب پر ختم کرتا ہے تو ان خطوط مستقیم کے طولوں کا جبری مجموعہ، اب کے طول کے مساوی ہوگا۔

۱۵۔ جب خط مستقیم وف ابتدائی محل و ۱ سے گھوم کر دفعہ ۲ کی بہو جب ایک زاویہ کی تکوین کرتا ہے تو ہم یہ فرض کر لیں گے کہ اثنائے گردش میں خط مستقیم وف میں مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح وہ زاویہ جو وف کے کسی محل میں رک جانے سے تکوین پاتا ہے محدودی خطوں کی دو مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہوتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے



کہ اگر دو خطوط مستقیم کی مثبت سمتیں اب، ج د ہوں تو اب اور ج کا درمیانی زاویہ، اب اور ج د کے درمیانی زاویے سے بقدر دو قانہ زاویوں کے چھوٹا یا بڑا ہوگا، کیونکہ کوئی خط محل اب سے گھومنے لگے تو اسکو د ج پر منطبق ہونے کے لئے جس زاویہ میں سے گھومنا ہوگا وہ اس زاویہ سے بقدر ۱۸۰ کے بڑا یا چھوٹا ہوگا جس میں سے اس کو ج د پر منطبق ہونے کے لئے گھومنا پڑتا ہے۔

اگر ہم ان تمام ہم اختتامی زاویوں پر غور کریں جو اب اور ج د، اور اب اور ج سے علی الترتیب محدود ہیں تو (اب، ج د) = (اب، د ج) + ۱۸۰ جبکہ زاویے درجوں میں ناپے جائیں۔

۱۶۔ جب کوئی خط مستقیم اپنے متوازی حرکت کرے تو ہم

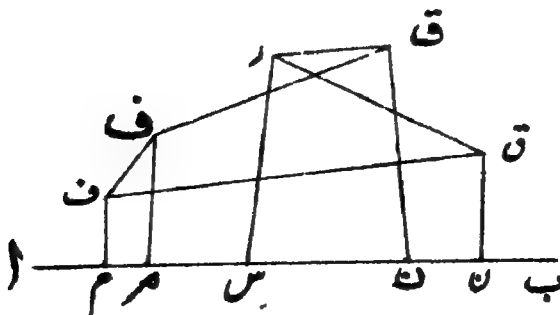
فرض کریں کہ اس کی مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح اگر اب ج د  
غیر قاطع خطوط مستقیم ہوں تو ان کا درمیانی زاویہ، اب اور اس خط مستقیم  
تھے درمیانی زاویہ کے مساوی ہو گا جو ا سے ج د کے متوازی کھینچا  
گیا ہے۔ عام ہندسی مقاصد کے لئے اب اور ج د کا درمیانی  
زاویہ (اب اور متوازی خط کے درمیان کا چھوٹے سے چھوٹا  
زاویہ بال لحاظ علامت لیا جاتا ہے۔

۱۷۔ اگر کسی خط مستقیم ف ق کے سرور ف، ق سے کسی  
دوسرے خط مستقیم اب پر عمود ف م، ق ن کھینچے جائیں تو حصہ  
م ن کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ خط مستقیم اب پر خط مستقیم  
ف ق کا غل کہتے ہیں۔

یہ واضح رہے کہ ف ق اور اب کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری  
نہیں ہے۔ ف ق کا غل ن م ہے اور اس لئے اس کی علامت  
ف ق کے غل کی علامت سے مختلف ہے۔

اگر نقطوں ف اور ق کو کسی شکستہ خط سے ملایا جائے جیسے  
ف ق ر ق تو اب پر ف، ف ق ر ق کے غلوں کا مجموعہ  
اب پر ف ق کے غل کے مساوی ہو گا۔ کیونکہ غلوں کا مجموعہ  
ہے م م + م ن + ن س + س ن اور یہ دفعہ ۱۴ کی بموجب م ن

(14)



کے مساوی ہے اس طرح ہمیں غلوں کی یہ بنیادی خاصیت حاصل ہوتی ہے۔ کسی ثابت خط مستقیم پر، دو نقطوں  $F$  و  $R$  کو ملانے والے کسی شکستہ خط کے انصوں کے غلوں کا مجموعہ صرف  $F$  اور  $R$  کے محلوں پر منحصر ہوتا ہے اور  $F$ ،  $R$  جس طریقہ سے ملائے گئے ہیں اس پر منحصر نہیں ہوتا۔

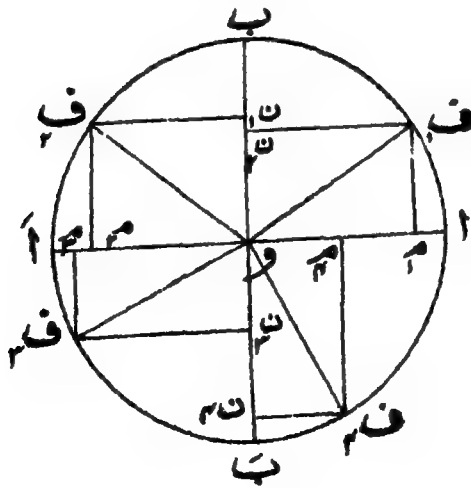
اس مسئلہ کی ایک مخصوص صورت حسب ذیل ہے۔ کسی خط مستقیم پر کسی بند کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ضلعوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ شکل بالا میں اگر نقطے  $F$  اور  $R$  ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ان کو ملانے والا شکستہ خط ایک بند کثیر الاضلاع ہو جاتا ہے، اور چونکہ  $F$  کا غل صفر ہے کثیر الاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے غلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ کثیر الاضلاع کا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے، اور نیز اس میں کوئی متداخلہ زاویے ہو سکتے ہیں۔



(15)

## تیسرا باب دائری تفاعل۔ دائری تفاعلوں کی تعریف

۱۸۔ زاوی اور خطی مقداروں کی پیمائش کا طریقہ بتا دینے کے بعد اب ہم دائری تفاعلوں یا مثلثی نسبتوں کی تعریف کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ  $\omega$  ابتدائی محل  $\omega$  سے نکلتا ہے اور اس کی گردش سے کسی مقدار  $\alpha$  کے زاویہ  $\omega$  کی تکمیل دفعہ ۲ کی بموجب ہوتی ہے، زاویہ  $\alpha$  کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۲ میں بیان کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ  $\omega$  ب و ب،  $\alpha$  پر نمود نکالا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے



ہیں کہ آ و ا اور ب و ب میں مثبت سمتیں علی الترتیب و سے ا کی طرف اور و سے ب کی طرف ہیں۔ نیز گھومنے والے خط کی مثبت سمت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۱۵ میں بیان کی گئی ہے۔

(16)

ابتدائی خط پر و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب التمام کہتے ہیں اور ا سے جم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

خط مستقیم و ب پر جو ابتدائی خط کے ساتھ  $90^\circ$  درجہ کا زاویہ بناتا ہے، و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں اور ا سے جب ا سے تعبیر کرتے ہیں و ب پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا ماس کہتے ہیں اور ا سے م ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ا پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ب پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا ماس التمام کہتے ہیں اور ا سے م ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ف کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا قاطع کہتے ہیں اور ا سے ق ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

وف کو جو نسبت وب پر وف کے ظل سے ہے اسکو  
زاویہ ا کا قاطع التام کہتے ہیں اور اسے تم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس

$$\text{جم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{وف}}، \text{جب ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وف}}، \text{مس ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وم}}$$

$$\text{م ا} = \frac{\text{وم}}{\text{ون}}، \text{قط ا} = \frac{\text{وف}}{\text{وم}}، \text{تم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{ون}}$$

اگر نسبتوں کے تمام طول اپنی اپنی مناسب علامت کے ساتھ لئے  
جائیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ ان میں وف کی علامت ہمیشہ مثبت رہتی ہے  
لیکن وم اور ون میں سے ہر ایک کی علامت زاویہ ا کی مقدار کی موجب  
مثبت یا منفی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ وف، ون کے مساوی ہے  
اور اس کی علامت بھی وہی ہے جو ون کی ہے، اس طرح

$$\text{جب ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وف}}، \text{مس ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وم}}، \text{م ا} = \frac{\text{وم}}{\text{مف}}، \text{تم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{مف}}$$

شکل میں زاویہ ا کی چار مقداریں ہیں اوف، اوف، اوف، اوف  
اوف جو ف کے چار مقامات ف، ف، ف، ف کے متناظر ہیں۔

کسی مثبت یا منفی طول اب کا ظل ایک خط مستقیم ج د پر اس طرح معلوم  
کیا جاتا ہے کہ اب کو اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ لیکر اسکو اس زاویہ کی جیب التام  
مربوب دیا جائے جو ان خطوں کی مثبت سمتوں کے درمیان ہے جن پر اب اور ج د  
واقع ہیں، اس طرح ظل اپنی ٹھیک علامت کے ساتھ معلوم ہوتا ہے۔  
یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ شکل بالا میں وف کی علامت جیسے وہ  
ابتدائی محل و ا سے گھومتا ہے ہمیشہ مثبت رہتی ہے اور وف جب  
و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت اس کی علامت و ا کی علامت کے

مخالف ہوتی ہے۔

(17)

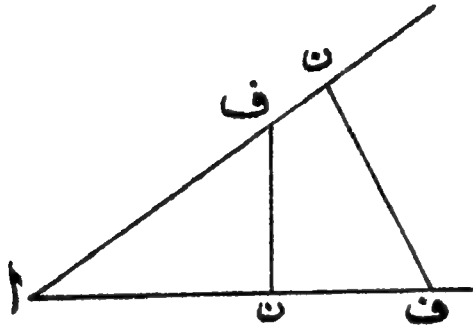
مخالف ہوتی ہے۔  
۱۹۔ وہ چھ نسبتیں جن کی تعریف اوپر کی گئی ہے دائری تفاعل  
ہیں، ان کو مثلثی نسبتیں یا مثلثی تفاعل بھی کہا جاتا ہے۔ ان میں سے  
ہر ایک صرف زاویہ ۱ کی مقدار پر منحصر ہے اور وف کے مطلق طول پر  
منحصر نہیں۔ یہ نتیجہ متشابہ مثلثوں کی اس خاصیت سے اخذ کیا گیا ہے  
کہ تمام متشابہ مثلثوں میں ضلعوں کی نسبتیں ایک ہی ہوتی ہیں، اس لئے  
جب وف کا کوئی اور طول لیا جاتا ہے تو ہمیں اسی زاویہ کے لئے حسب  
سابق وہی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس یہ چھ نسبتیں صرف زاویہ مقدار  
۱ کے تفاعل ہیں، ہم ۱ کو ستینی نظام یا دائری ناپ سے پیمائش کر سکتے ہیں،  
ہم بالعموم بڑے حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، .... ان زاویوں کے لئے استعمال  
کرینگے جن کی پیمائش درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں ہوئی ہو اور  
حروف 'ع'، 'ہ'، 'ط'، 'قہ' .... ایسے زاویوں کے لئے جن کی پیمائش  
دائری ناپ میں ہوئی ہو، اس طرح جب ۲ سے اس زاویہ کی  
جیب فراہم ہوگی جس کا ناپ درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں ۱ ہے  
اور جب عہ سے اس زاویہ کی جیب جس کا دائری ناپ عہ ہے۔  
ان چھ دائری تفاعلوں میں دو اور شامل کئے جا سکتے ہیں جو بعض اوقات  
استعمال کئے جاتے ہیں، ایک ہم الجیب ہے جسکو سہہ ۱ کہتے ہیں،  
دوسرا ہم التمام ہے جس کو سہم ۱ کہتے ہیں ان کی تعریف مساواتوں

سہہ ۱ = ۱ - جم ۱، سہم ۱ = ۱ - جب ۱

سے کیجاتی ہے۔  
 نظری تحقیقاتوں میں سہم الجیب اور سہم التمام شاذ و نادر ہی استعمال  
 ہوتی ہیں۔ لیکن جہاز رانی میں جو مضامین استعمال ہوتے ہیں ان میں  
 سہم الجیب اکثر واقع ہوتی ہے۔  
 ۴۔ مادہ زاوے کی صورت میں دائری تقاطعوں کی تعریف

۴۔ - حادثہ زاوے کی صورت میں دائری تقاطعوں کی تعریفیں

حسب ذیل شکل میں بیان کیا جاسکتی ہیں :- فرض کرو کہ دے ہوئے زاویے کو محدود کرنے والے خطوں میں سے کسی خط پر ف کوئی نقطہ ہے،



ف سے دوسرے خط پر ف ن عمود کھینچو تو مثلث قائم الزاویہ ف ا ن حاصل ہوتا ہے جس کا زاویہ ف ا ن دیا ہوا زاویہ ا ہے۔ تب مثلثی نسبتوں کی حسب ذیل تعریف کی جاتی ہے:-

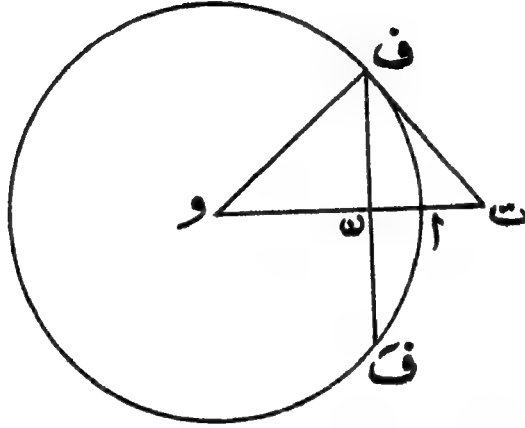
$$\text{جم ا} = \frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{وتر}} ، \text{جب ا} = \frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\text{مس ا} = \frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{ا سے متصل ضلع}} ، \text{م ا} = \frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}$$

$$\text{قط ا} = \frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{وتر}} ، \text{قم ا} = \frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

۲۱۔ حال حال تک دائری تفاعلوں کی تعریف نسبتوں کے ذریعہ سے نہیں بلکہ طولوں کے ذریعہ سے کی جاتی تھی جو ایک خاص نصف قطر کے دائرہ کی قوسوں کے لمبا سے لئے جاتے تھے۔ فرض کرو کہ دے ہوئے دائرہ کی ایک قوس ف ا ہے ف ن و ا پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ف پر کا خاص

ف ت ہے، خط ف ن کو ف ا کی جیب کہا جاتا تھا، و ن کو اس کی جیب التمام،  
ف ت کو اس کا حماس، و ت کو اس کا قاطع، اور ا ن کو اس کی ہم الجیب۔  
اس نظام میں جیب، جیب التمام، حماس، وغیرہ کی مقداریں نہ صرف زاویہ ف و ا



پر منحصر ہوتی تھیں بلکہ دائرہ کے نصف قطر پر بھی، جس کی تخصیص اس لئے ضروری تھی۔  
ان تفاعلوں کی تعریف کا موجودہ طریقہ جس میں ان کو نسبتوں کے طور پر بیان کیا  
جانا ہے یہ فائدہ رکھتا ہے کہ یہ تفاعل کسی دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتے  
اور اس لئے وہ صرف زاویہ کی مقدار کے تفاعل ہوتے ہیں۔ قوس کی جیب کو سب سے  
اول عرب کے عالم ریاضی البطونی نے استعمال کیا تھا (شش و عا ۱۵۱۷ء)؛ یونان  
کے علماء ریاضی قوس ف ا کی جیب کے لئے ف ن کی بجائے دوہری قوس کے  
وتر ف ف کو استعمال کیا کرتے تھے۔

## دائرہ تفاعلوں کے درمیان رشتے

(19)

۲۲۔ دائرہ تفاعلوں کی تعریفات سے ہمیں حسب ذیل رشتے  
فوراً مل جاتے ہیں:

$$(۱) \text{ جم } ا \text{ قاطع } ا = ۱ \quad (۲) \text{ جب } ا \text{ قاطع } ا = ۱$$

(۳) مس  $\angle$  مم  $\angle$  =  $\angle$  ' (۴) مس  $\angle$  = جب  $\angle$  : جم  $\angle$  '   
 مم  $\angle$  = جم  $\angle$  : جب  $\angle$  '   
 رشتوں (۱) ' (۲) ' (۳) کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے   
 کہ کسی زاویے کا قاطع، قاطع التمام، اور ماس التمام علی الترتیب اس   
 زاویے کی جیب التمام، جیب، اور ماس کے متکافی ہیں۔ رشتہ (۴)   
 اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی زاویہ کا ماس وہ نسبت ہے جو اسکی جیب   
 کو اس کی جیب التمام سے ہے اور رشتہ (۲) کی وجہ سے یہ کہنا ایسا ہی   
 ہے کہ کسی زاویہ کا ماس التمام وہ نسبت ہے جو اس کی جیب التمام کو اس کی   
 جیب سے ہے۔   
 ۲۳۔ دفعہ ۸ کی شکل میں ووف پر نام ربیع، دینا غور شد کے مسئلہ   
 کی رو سے، اس کے ظیل و مر اور مرف کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی   
 ہے، پس چونکہ نسبتیں ووف اور مرف علی الترتیب زاویہ  $\angle$  کی جیب التمام   
 اور جیب ہیں اسلئے (جم  $\angle$ ) + (جب  $\angle$ ) =  $\angle$  ۱، جسکو بالعموم یوں لکھا جاتا ہے،   
 جم  $\angle$  + جب  $\angle$  =  $\angle$  ۱   
 اگر اس مساوات کی طرفین کو جم  $\angle$  پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۱) اور   
 (۴) کو یاد رکھا جائے تو  $\angle$  ۱ = مس  $\angle$  = قاط  $\angle$ ، اسی طرح اگر مساوات   
 کی طرفین کو جب  $\angle$  پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۲) اور (۴) کو یاد   
 رکھا جائے تو  $\angle$  ۱ = مم  $\angle$  = قاط  $\angle$ ، اس طرح یہ تین متاثرات

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم} \angle + \text{جب} \angle = \angle ۱ \\ \text{مس} \angle = \text{قط} \angle \\ \text{مم} \angle = \text{قط} \angle \end{array} \right. \dots \dots \dots (۵)$$

دائری تفاعلوں کے درمیان ایک ہی رشتہ کی مختلف شکلیں ہیں۔

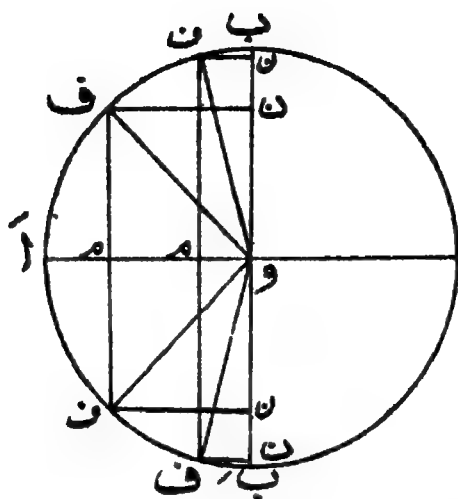
۲۴۔ یہ پانچ غیر تابع رشتے جو چھ دائری تفاعلوں کے درمیان اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کی مدد سے ہم ان چھ دائری تفاعلوں میں سے کسی پانچ تفاعلوں کو چھٹے تفاعل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ طالب علم کو جدول ذیل کی صحت کی تصدیق خود کر لینی چاہئے جس میں لا سے مراد وہ دائری تفاعل ہے جو اس کے ستون کے برے پر لکھا ہے اور جلوں کی قیمت ہر افقی خط کے شروع میں درج ہے۔

(20)	جب ا = لا	جم ا = لا	س ا = لا	مم ا = لا	قط ا = لا	قم ا = لا
جب ا = لا	لا	$\sqrt{2لا - 1لا}$	$\frac{لا}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{1}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{\sqrt{1 - 2لا}}{لا}$	$\frac{1}{لا}$
جم ا = لا	$\sqrt{2لا - 1لا}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{لا}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{1}{لا}$	$\frac{\sqrt{1 - 2لا}}{لا}$
س ا = لا	$\frac{لا}{\sqrt{2لا - 1لا}}$	$\frac{\sqrt{2لا - 1لا}}{لا}$	لا	$\frac{1}{لا}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - 2لا}}$	$\frac{\sqrt{1 - 2لا}}{لا}$
مم ا = لا	$\frac{\sqrt{2لا - 1لا}}{لا}$	$\frac{لا}{\sqrt{2لا - 1لا}}$	$\frac{1}{لا}$	لا	$\frac{1}{\sqrt{1 - 2لا}}$	$\frac{\sqrt{1 - 2لا}}{لا}$
قط ا = لا	$\frac{1}{\sqrt{2لا - 1لا}}$	$\frac{1}{لا}$	$\frac{1}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{\sqrt{2لا + 1لا}}{لا}$	لا	$\frac{\sqrt{لا}}{\sqrt{1 - 2لا}}$
قم ا = لا	$\frac{1}{لا}$	$\frac{1}{\sqrt{2لا - 1لا}}$	$\frac{1}{\sqrt{2لا + 1لا}}$	$\frac{\sqrt{2لا + 1لا}}{لا}$	$\frac{لا}{\sqrt{2لا - 1لا}}$	لا

اس جدول میں جذر المربعوں کی علامتوں کے ابہام غیر متعین چھوڑ دئے گئے ہیں۔ اس جدول کی تصدیقیوں کی جاسکتی ہے :- فرض کرو کہ  
 قط ا = لا دیا گیا ہے تو دفعہ ۲۲ کے رشتہ (۱) سے جم ا =  $\frac{1}{لا}$  رشتہ (۵) کی دوسری شکل سے سس ا =  $\sqrt{1 - 2لا}$  اور پھر رشتہ (۳) سے مم ا =  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2لا}}$







جم۔ (۱) = جم ۱ اور جب (۱) = جب ۱  
جن سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

مس (۱-) = مس ۱  
قط (۱-) = قط ۱  
مم (۱-) = مم ۱  
قم (۱-) = قم ۱

اگر کسی متغیر کا تفاعل اپنی مقدار نہ بدے جبکہ متغیر کی علامت تبدیل  
کی جائے تو ایسے تفاعل کو جفت تفاعل کہتے ہیں، لیکن اگر تفاعل کی  
وہی عددی قیمت ہو جو پہلے تھی مگر مختلف علامت کے ساتھ تو تفاعل کو  
طاق تفاعل کہتے ہیں، مثلاً لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۲</sup> کا جفت تفاعل ہے اور لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۲</sup> کا  
طاق تفاعل ہے، لیکن لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> نہ جفت ہے اور نہ طاق کیونکہ  
اسکی عددی قیمت بدلتی ہے جبکہ لا کی علامت تبدیل کی جاتی ہے۔  
پس معلوم ہوا کہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور قاطع جفت تفاعل ہیں  
اور جیب، ماس، تمام، اور قاطع التمام طاق تفاعل ہیں

سہم الجیب جفت تفاعل ہے، لیکن سہم التمام نہ جفت ہے نہ طاق  
۲۷۔ کسی زاوے کے دائرۃ تفاعلوں کی قیمتیں حدودی خطوط

کے محل پر لحاظ دوسرے حدودی خط و ا کے منحصر ہوتی ہیں، اس لئے  
(22) تمام سہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف) کے دائرۃ تفاعل وہی ہوتے  
ہیں جو زاویہ ا کے ہیں، یعنی یہ الفاظ دیگر تمام زاویوں  $n \times 90^\circ + 1$   
کے دائرۃ تفاعل وہی ہوتے ہیں جو ا کے ہیں جبکہ  $n$  کوئی مثبت  
یا منفی صحیح عدد ہو۔ اگر  $e$  اس زاویہ کا دائرۃ ناپ ہو جس میں ا درجے  
ہیں تو دائرۃ ناپ میں تمام زاویوں  $2n\pi + e$  کے دائرۃ تفاعل  
وہی ہیں جو زاویہ  $e$  کے ہیں۔ نیز چونکہ زاویوں  $2n\pi - e$  سب کے  
سب ایک ہی دائرۃ تفاعل کہتے ہیں اس لئے

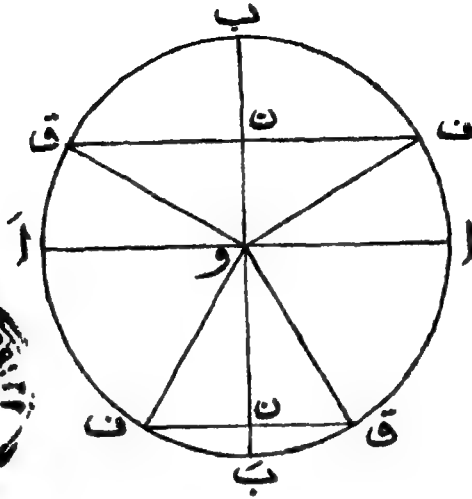
$$\text{جب } (2n\pi - e) = \text{جب } (-e) = \text{جب } e$$

اور  $\text{جب } (2n\pi - e) = \text{جب } (-e) = \text{جب } e$  اور  
اوپر کی بحث میں جو خواص حاصل ہوئے ہیں وہ ذیل کی مساواتوں  
میں شامل ہیں:-

$$\text{جب } (2n\pi \pm e) = \pm \text{جب } e \quad \text{جب } (2n\pi \pm e) = \text{جب } e \quad \dots \dots (2)$$

۲۸۔ اگر زاویہ  $180^\circ - 1$  یا  $\pi - e$ ، و ف سے محدود ہو تو

و ف، و ا کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو و ف، و ا کے ساتھ  
بناتا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر و ف اور و ف کے ظل مساوی  
مگر علامت میں مختلف ہیں اور و ب پر و ف اور و ف کے ظل مساوی  
اور ہم علامت ہیں، اس لئے جب  $(\pi - e) = \text{جب } e$



اور جم (۲۱ - ع) = - جم ع، یہ مساواتیں درست رہتی ہیں خواہ ع کچھ ہی ہو  
اس طرح ع کو - ع میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } (۲۱ + ع) = \text{جب } (- ع) = - \text{جب } (ع) \quad (۱)$$

اور جم (۲۱ + ع) = - جم (- ع) = - جم ع  
پس مساواتوں کا یہ نظام

(28)

$$\left. \begin{aligned} \text{جب } (۲۱ \pm ع) &= \mp \text{جب } ع \\ \text{جم } (۲۱ \pm ع) &= - \text{جم } ع \end{aligned} \right\} \dots (۲)$$

حاصل ہوتا ہے اور ان سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس } (۲۱ \pm ع) = \pm \text{مس } ع \dots (۳)$$

$$\begin{aligned} \text{نیز } \left\{ \begin{aligned} \text{جب } (۲۱ + \overline{۲۱} + ع) &= \text{جب } (۲۱ \pm ع) = \mp \text{جب } ع \\ \text{جم } (۲۱ + \overline{۲۱} + ع) &= \text{جم } (۲۱ \pm ع) = - \text{جم } ع \\ \text{مس } (۲۱ + \overline{۲۱} + ع) &= \text{مس } (۲۱ \pm ع) = \pm \text{مس } ع \end{aligned} \right. \quad (۴) \end{aligned}$$

۲۹۔ دھ ۲۸ کی شکل میں وف جو زاویہ وب کے ساتھ بناتا ہے وہ ۹۰ + ہے، اس لئے زاویہ ۹۰ + یا  $\frac{1}{p} + \pi$  + عہ کی جیب التمام وہ نسبت ہے جو وب پر وف کے ظل کو وف سے ہے، پس چونکہ وب پر کا ظل مختلف علامت کے ساتھ وب پر کے ظل کے مساوی ہے اس لئے جم  $(\frac{1}{p} + \pi + عہ) = -$  جب عہ،  $\frac{1}{p} + \pi$  + عہ کو عہ میں تبدیل کرنے سے جم عہ = - جب  $(\frac{1}{p} - \pi)$  پس (۶) کی رو سے

$$\text{جم عہ} = \text{جب} (\frac{1}{p} - \pi - عہ)$$

ان مساواتوں میں اگر ہم چاہیں تو عہ کی علامت بدل سکتے ہیں کیونکہ عہ یا مثبت ہوگا یا منفی، پس ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ) = \text{جم عہ} \\ \text{جم} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ) = \mp \text{جب عہ} \\ \text{مس} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ) = \mp \text{مم عہ} \end{array} \right. \dots \dots (۱۰)$$

نیز (۶) اور (۹) کی رو سے

$$\text{جب} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = (-۱) \text{ جب} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ)$$

$$\text{جم} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = (-۱) \text{ جم} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ)$$

$$\text{مس} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = \text{مس} (\frac{1}{p} \pm \pi - عہ)$$

اس لئے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جب} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = (-۱) \text{ جم عہ} \\ \text{جم} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = (-۱) \text{ جب عہ} \\ \text{مس} (\frac{1}{p} + \pi - عہ) = \text{مم عہ} \end{array} \right. \dots \dots (۱۱)$$

زاویہ ۲۲۔ عہ کو زاویہ عہ کا تکملہ کہتے ہیں اور زاویہ  $\frac{1}{p}$  ۲۲۔ عہ کو زاویہ عہ کا متمم کہتے ہیں۔ ہم بتا چکے ہیں کہ کسی زاویہ کی جیب اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی، مگر مختلف علامت کے ساتھ، نیز کسی زاویہ کی جیب اس کے متمم زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے متمم زاویہ کی جیب کے مساوی۔

(24) ضوابط (۶) تا (۱۱) کی مدد سے ہم کسی زاوئے کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جبکہ صفر اور  $\frac{1}{p}$  ۲۲ کے درمیان اس زاویہ کے دائری تفاعل کی قیمتیں معلوم ہوں جو دئے ہوئے زاویہ سے بقدر  $\frac{1}{p}$  ۲۲ کے ضعیف کے بڑایا چھوٹا ہو، یا ہم اس وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دئے ہوئے زاوئے کے متمم زاوئے کے دائری تفاعل معلوم ہوں۔

### دائری تفاعلوں کی دوریت

۳۔ جب متغیر لا کے تفاعل (لا) کی یہ خاصیت ہو کہ لا کی ہر قیمت کے لئے

$$f(لا) = f(لا + ک)$$

جہاں ک مستقل ہے تو تفاعل (لا) کو دوری تفاعل کہتے ہیں، نیز اگر ک وہ چھوٹے سے چھوٹا مستقل ہو جسکے لئے یہ تفاعل یہ خاصیت رکھتا ہے تو ک کو تفاعل کا دور کہتے ہیں۔

اب یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ اگر  $f(1) = f(1 + k)$  تو  $f(1)$  (لا)  $f(1 + k)$  (نک) جہاں  $n$  کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ اگر لاکہ ان تمام قیمتوں کے لئے جو لاکہ دو قیمتوں کے درمیان (جن کا فرق  $k$  ہے) واقع ہیں تفاعل کی قیمتیں دی گئی ہوں تو لاکہ باقی سب قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں، تفاعل کی قیمتیں فی الحقیقت ان قیمتوں کی صرف تکرار ہونگی جو مذکورہ وقفہ میں دی گئی ہیں۔

جب  $n$  اور  $m$  کی خاصیت (۶) سے واضح ہے کہ یہ تفاعل  $n$  کے دوری تفاعل ہیں، اور ان کا دور  $2\pi$  ہے، یا اگر زاویہ کی پیمائش درجوں میں ہو تو جب  $1$  اور  $m$  کے دوری تفاعل ہیں اور دور  $2\pi$  ہے۔ خاصیت (۷) سے یہ امر واضح ہے کہ یہ تفاعل ایسے ہیں کہ ان کی قیمتیں زاویہ کی ان قیمتوں کے لئے جن میں نصف مکمل دور کا فرق ہے مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف۔ خاصیت (۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $m$  اس دوری تفاعل ہے، اس کا مکمل دور  $2\pi$  ہے جو جب اور جیب التمام کے دور کا نصف ہے۔ ظاہر ہے کہ قاطع یا قاطع التمام کا دور  $2\pi$  ہے اور  $m$  جیب التمام کا  $2\pi$ ۔ آئندہ چل کر یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلوں کی اہمیت علم تحلیل کے نظریہ میں صرف ان کی اس خاصیت دوریت کی وجہ سے ہے۔

## دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں

۳۱۔ اب ہم کسی زاویہ کے دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں جبکہ زاویہ صفر سے چار قاتمہ زاویوں تک بڑھتا ہے ان کو معلوم کریں گے۔

(۱) کسی زاویہ کی جیب کی قیمت میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ (۱۸) کی شکل میں  $\sin$  و  $\cos$  کی مقدار اور علامت کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیے۔ جب زاویہ  $0$

صفر ہوتا ہے تو ون صفر ہوتا ہے اور جیسے ۱۰۰ تک بڑھتا ہے ون مثبت رہتا ہے اور بڑھتا ہے تا آنکہ ۱۰۰۰ اور اس صورت میں ون ۱۰۰۰ کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے جب ۱۰۰۰ مثبت ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔ پھر جیسے ۱۰۰۰ سے ۱۸۰۰ تک بڑھتا ہے ون مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے یہاں تک کہ ۱۸۰۰ کے مساوی ہوتا ہے تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے، اس لئے جب ۱۰۰۰ مثبت ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے۔ پھر جیسے ۱۸۰۰ سے ۲۷۰۰ تک بڑھتا ہے تو ون منفی ہوتا ہے اور عدد بڑھتا ہے یہاں تک کہ اگر ۲۷۰۰ ہو تو ون ۰ = - وقت، اس لئے جب ۱۰۰۰ منفی ہے اور صفر سے ۱۰۰۰ تک بدلتا ہے۔ نیز جیسے ۲۷۰۰ سے ۳۶۰۰ تک بڑھتا ہے تو ون منفی ہوتا ہے اور عدد گھٹتا ہے یہاں تک کہ اگر ۳۶۰۰ ہو تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے اس طرح جب ۱۰۰۰ منفی ہے اور ۱۰۰۰ سے صفر تک بدلتا ہے۔

(۲) جیب النمام کی صورت میں ہمیں ظل و ہر کی علامت اور مقدار کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ۱۰۰۰ صفر سے ۱۰۰۰ تک بڑھتا ہے جم ۱۰۰۰ مثبت رہتا ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے جیسے ۱۰۰۰ سے ۱۸۰۰ تک بڑھتا ہے جم ۱۰۰۰ منفی رہتا ہے اور صفر سے ۱۰۰۰ تک تبدیل ہوتا ہے، جیسے ۱۸۰۰ سے ۲۷۰۰ تک بڑھتا ہے جم ۱۰۰۰ منفی رہتا ہے اور ۱۰۰۰ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے، اور جیسے ۲۷۰۰ سے ۳۶۰۰ تک بڑھتا ہے جم ۱۰۰۰ مثبت رہتا ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے (۳) کسی زاویہ کے عکاس کی تبدیلیوں کو معلوم کرنے کے لئے

ہمیں نسبت  $\frac{\text{ون}}{\text{وہ}}$  پر غور کرنا چاہیے، جب یہ زاویہ صفر ہوتا ہے تو یہ نسبت

صفر ہوتی ہے اور جیسے یہ زاویہ صفر سے ۱۰۰۰ تک بڑھتا ہے یہ نسبت مثبت رہتی ہے اور بڑھتی ہے، جب یہ زاویہ ۱۰۰۰ کا ہوتا ہے تو ظل و ہر صفر ہے اور ون اکائی کے مساوی ہے، پس مس ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰، پھر جیسے



۱. ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے ماس منفی رہتا ہے اور -∞ سے صفر تک بدلتا ہے، جیسے ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑھتا ہے ماس مثبت رہتا ہے کیونکہ ۰ن اور وہ دونوں منفی ہیں اور وہ بڑھتا ہے حتیٰ کہ وہ لاتنا ہی ہو جاتا ہے جبکہ ۱۸۰ = ۲۷۰، جیسے ۱۸۰ سے ۳۶۰ تک بڑھتا ہے ماس منفی رہتا ہے اور -∞ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ماس ۱۸۰ قیمت ۹۰ میں سے گزرتے وقت +∞ سے -∞ تک تبدیل ہوتا ہے اور ۲۷۰ میں سے گزرتے وقت -∞ سے +∞ تک بدلتا ہے، اس کی توضیح کے لئے صرف یہ بتا دینا ضروری ہے کہ اگر کوئی متغیر لا، صفر میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلے تو اس کا متکافی ۱/۱، ∞ میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلتا ہے۔

(۳) اب چونکہ قاطع التمام، قاطع اور ماس التمام علی الترتیب جیب، جیب التمام اور ماس کے متکافی تفاعل میں اس لئے ان کی قیمتوں کی تبدیلیاں اوپر سے اخذ کی جاسکتی ہیں۔ ان کی قیمتیں ۱۸۰، ۹۰، ۰، ۲۷۰، ۳۶۰ کے لئے حسب ذیل جدول میں دی گئی ہیں جس میں وہ نتیجے بھی شامل ہیں جو جیب، جیب التمام، اور ماس کے لئے اوپر حاصل ہو چکے ہیں۔

۳۶۰	۲۷۰، ۱۸۰	۲۷۰	۱۸۰، ۹۰	۱۸۰	۱۸۰، ۹۰	۹۰	۹۰، ۰	۰	
۰	-	۱-	-	۰	+	۱	+	۰	جیب
۱	+	۰	-	۱-	-	۰	+	۱	جیب
۰	-	∞±	+	۰	-	∞±	+	۰	ماس
∞±	-	۰	+	∞±	-	۰	+	∞±	ماس
۱	+	∞±	-	۱-	-	∞±	+	۱	قطر
∞±	-	۱-	-	∞±	+	۱	+	∞±	قطر

## دائرۂ تفاعلوں کی ہندی تعبیر

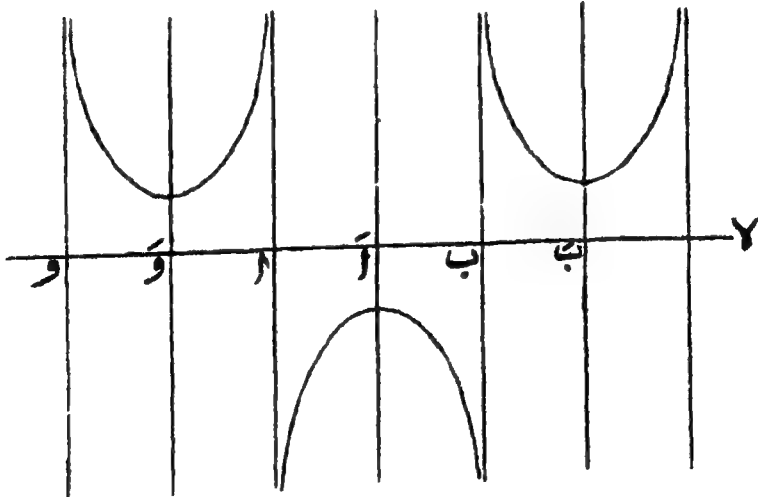
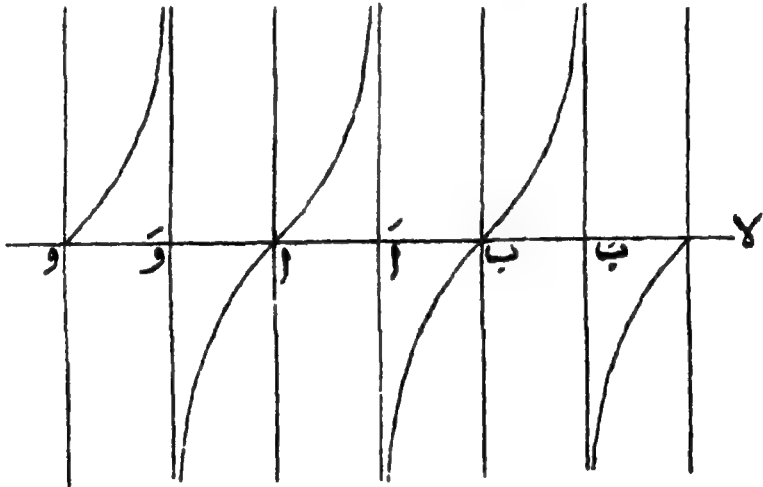
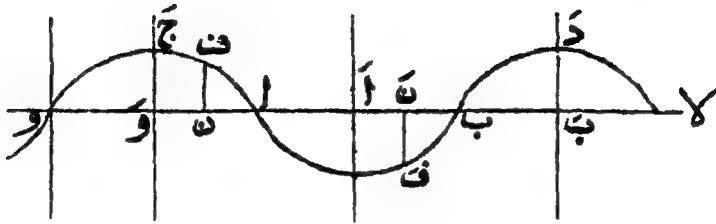
۳۲۔ دائرۂ تفاعلوں کی قیمت کی تبدیلیوں کی ہندی تعبیر حاصل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کریں گے کہ کسی زاویہ کا دائرۂ تفاعل، ایک ثابت خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے کسی مستقل پاء کی ہو جب طول لا لینے سے تعبیر ہوتا ہے، اور تفاعل کی عددی قیمت اس متناظر معین کے طول سے تعبیر ہوتی ہے جو دئے ہوئے خط مستقیم پر طول لا کے سرے میں سے عمود وار کھینچا گیا ہے، تب اس معین کے سرے سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دائرۂ تفاعل کی ترسیم کو تعبیر کریگا۔

اگلے صفحہ پر تین شکلیں ہیں جن میں سے پہلی شکل میں جب لا اور جم لا کی ترسیمیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر و مبدا ہو جہاں سے طول لا ثابت خط مستقیم و لا پر ناپا گیا ہے اور  $1 = \pi$ ،  $\text{وب} = \pi/2$ ،  $\text{و} = \pi/4$ ،  $\text{و} = \pi/2$ ،  $\text{و} = \pi$ ،  $\text{و} = 3\pi/2$ ،  $\text{و} = 2\pi$  کی اس قیمت کو تقریباً تعبیر کرتا ہے جو صفر اور  $\pi/2$  کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے جواب میں ہے۔ اگر و کو مبدا لیا جائے اور  $\text{وب} = \pi/2$ ،  $\text{و} = \pi$ ،  $\text{و} = 3\pi/2$ ،  $\text{و} = 2\pi$  کی اس قیمت کو تقریباً تعبیر کرتا ہے لا کی ان قیمتوں کے جواب میں جو صفر اور  $\pi/2$  کے درمیان ہیں، یہ نتیجہ رشتہ جم لا۔

جب  $(\pi/4 + \pi)$  سے حاصل ہوا ہے۔ وب کے آگے منحنی

وف ف ب، مبدا و کمبر دو جانب، لا انتہا مرتبہ تکرار پائے گا۔ اسی طرح دوسری شکل میں مس لا اور مم لا کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں، و مبدا ہے مس لا کے لئے اور و مبدا ہے مم لا کے لئے، و ف ب میں سے گزرنے والے معین منحنی کے متقارب ہیں، ان نقطوں پر تفاعل لا متناہی قیمت میں سے گزرتے وقت علامت بدلتے ہیں۔ تیسری شکل میں قسط لا اور مم لا کی ترسیمات دی گئی ہیں، و مبدا ہے مم لا کے لئے اور و مبدا ہے

قطلا کے لئے، وا، ب میں سے گزرنے والے معین اس منحنی کے متقاربات ہیں۔

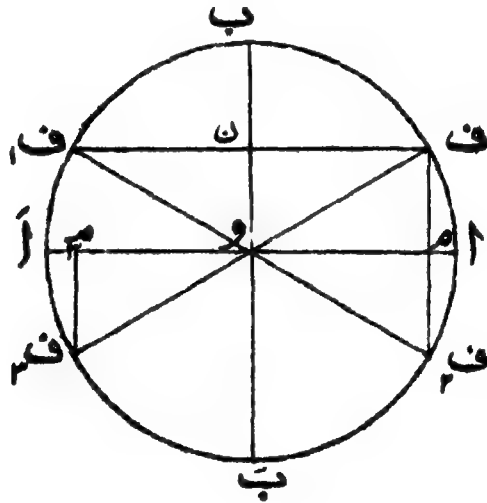


(28)

مثال :- حسب ذیل تفاعلوں کی ترسیات کہینجو۔

- (۱) جب لا + جم لا  
(۲) جب لا + جم لا  
(۳) جس لا + قط لا  
(۴) جب (۲) جم لا \ (۲) جم (۲) جب لا  
(۵) جب لا - ۲ جم لا  
(۶) جب (۱/۲ + ۲ + ۱/۲) جم لا

وہ زاوے جن کا دائری تفاعل وہی ہے  
۳۳۔ سب ہم ان تمام زاویوں کے لئے جملے معلوم کریں گے جن کے  
ایک دائری تفاعل کی قیمت ان سب زاویوں کے لئے ایک ہی ہے۔



(۱) اگر شکل میں دیا ہوا زاویہ ا و ف ہو اور ف ف، و ا کے متوازی  
کہینچا جائے تو زاوے (و ا، و ف) اور (و ا، و ف) ہی صرف وہ زاویے  
ہیں جن کی جیب وہی ہے جو زاویہ ا و ف کی ہے، کیونکہ صرف یہی  
وہ زاویے ہیں جن کے لئے و ب پر نصف قطر کا ظل و ن کے  
مساوی ہے، یہ زاویے ۲ ن + ۲ + عمہ اور ۲ ن + ۲ + عمہ ہیں جہاں  
عمہ زاویہ ا و ف کا دائری ناپ ہے اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

یہ دونوں جہز  $m + (1 - m)$  عامہ میں شامل ہیں جہاں  $m$  کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے، پس یہ جملہ اُن تمام زاویوں کو بیان کرتا ہے جن کی جیب و ہی ہے جو  $m$  کی ہے۔

(۲) پھر  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  کے متوازی کھینچو تو زاویے (د) و (ف) اور (و) و (ف) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کی جیب اتمام دہی ہے جو زاویہ  $\theta$  کی ہے، کیونکہ صرف یہی وہ زاویے ہیں جن کے لئے  $\cos \theta$  کا ظل و  $\sin \theta$  کے مساوی ہے، یہ دونوں زاویے ضابطہ  $m + m$  عامہ میں شامل ہیں، جہاں  $m$  کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۳) اگر  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  خارج کیا جائے تو زاویے (د) و (ف) اور (و) و (ف) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کا  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  ہی ہے جو زاویہ  $\theta$  کا ہے، یہ زاویے علی الترتیب  $m + m$  عامہ اور  $m + m$  عامہ ہیں اور اس لئے دونوں ضابطہ  $m + m$  عامہ میں شامل ہیں، جہاں  $m$  کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۴) اب چونکہ جن زاویوں کا قاطع اتمام ایک ہی ہواں کی جیب بھی ایک ہی ہوتی ہے اس لئے  $m + (1 - m)$  عامہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع اتمام وہی ہے جو  $\theta$  کا ہے، اسی طرح  $m + m$  عامہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع وہی ہے جو  $\theta$  کا ہے، اور  $m + m$  عامہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  ہی ہے جو  $\theta$  کا ہے۔

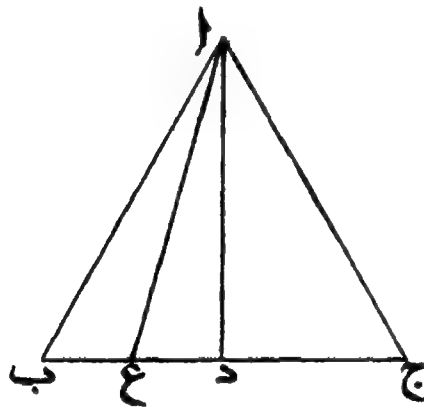
اوپر کی ہر صورت میں  $m$  یا  $n$  کی قیمتوں میں صفر بھی داخل ہے۔

**بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتوں کا تعین**

$m + m$  — چند اہم زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں سادہ ہندی طریقوں سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

(۱) زاویہ  $45^\circ$  یا  $\frac{\pi}{4}$ ، قائم الزاویہ مثلث متساوی الساقین کا ایک حادہ زاویہ ہے، اس زاویہ کی جیب اور جیب اتمام صرف ایک

دوسرے کے مساوی ہیں، اور چونکہ ان کے مربوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے، ان میں سے ہر ایک  $\frac{1}{3}$  کے مساوی ہے، اس زاویہ کا ماس ایک ہے۔  
(۲) مثلث مساوی الاضلاع کا ہر زاویہ  $60^\circ$  یا  $\frac{1}{3}\pi$  ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ  $\angle B$  ج مساوی الاضلاع مثلث ہے،  $\angle B$  ج پر عمود  $AD$  کھینچو تو زاویہ  $B$  کی جیب  $\frac{AD}{AB}$  ہے اور یہ  $\frac{1}{2}$  کے مساوی ہے، اسی زاویہ کی جیب،  $\frac{1}{2} = \frac{AD}{AB}$  ہے۔  $90^\circ$  کا ماس  $\frac{\pi}{2}$  یا  $\frac{1}{2}\pi$  ہے، پس  $\frac{1}{2}\pi = \frac{AD}{AB}$  اور جب  $\frac{1}{2}\pi = \frac{AD}{AB}$ ، نیز  $\frac{1}{2}\pi = \frac{AD}{AB}$  اور  $\frac{1}{2}\pi = \frac{AD}{AB}$  (۳) زاویہ  $D$   $\angle B$  کا نصف  $\angle C$  کھینچو تو زاویہ  $D$   $\angle C = \frac{1}{2}\pi$  اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳ کی رو سے

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

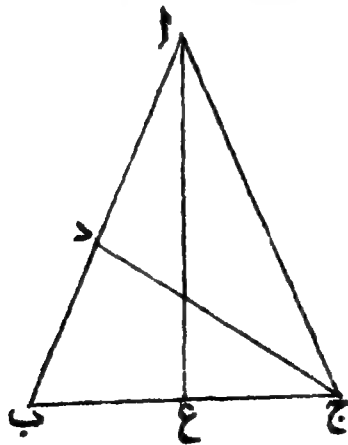
$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

اور ان سے  $\frac{دے}{دے} = \frac{دے}{دے} = ۱۵ = \frac{۳۷}{(۳۷+۲)} = ۲ - ۳۷$  پس  
اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳۷-۹۷}{۲۷} = ۱۵ \text{ جم } \frac{۳۷+۹۷}{۲۷} = ۱۵$$

ہم ان قیمتوں سے ۱۵ کے متکم زاویہ ۵۷ یا ۱۱۳ کی جیب جیب تمام  
اور ماس حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ہم پھر زاویہ ۵۷ کی تصنیف کریں تو ہمیں  
۵۷ یا ۱۱۳ کا ماس حاصل ہونا چاہیے اور ہم اس طریقہ کو جاری رکھ کر شکل  
۳۷ کے تمام زاویوں کے ماس حاصل کر سکتے ہیں جہاں ف ایک  
ثبت صحیح عدد ہے، لیکن ہم آئندہ ایسے ضابطے حاصل کریں گے جن کی مدد سے  
ان زاویوں کے تفاعلوں کو یکے بعد دیگرے محسوس کیا جاسکتا ہے، اس طرح ہندسی  
عمل کو جاری رکھنے کی ضرورت باقی نہیں رہتی۔

اس کے مشابہ ہندسی طریقہ سے شکل ۳۷ کے زاویوں کے دائری  
تفاعل حاصل ہو سکتے ہیں۔



(۴) فرض کرو  
کہ  $\Delta$  ب ج ایک  
مثلث ہے جس میں  
قاعدہ پر کے زاویوں  
میں سے ہر ایک اس  
پر کے زاویہ کا دو چند  
ہے یعنی قاعدہ پر  
کا ہر زاویہ ۲۷ یا  
 $\frac{۱}{۵}$  ہے اور

(81) زاویہ راس ۳۶ یا  $\frac{1}{12}\pi$ ۔ اگر راس کو ۲ پر تقسیم کیا جائے اس طور پر کہ لب  $\times$  ب  $\div$   $\frac{1}{12}\pi$  = ۱۵ تو اقلیدس مقالہ چارم مسئلہ ۱۰ میں یہ بتایا گیا ہے کہ  $15 = 3 \times 5$  = د ج  $\times$  ج ب۔ اب ب  $\times$  ج پر اے غنود نکالو۔ اگر نسبت  $\frac{15}{3} = 5$  کو ا سے بغیر کیا جائے تو ۱۔ لا = لا اور اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $\frac{1}{12}\pi = 5$  (۱۵-۱) چہیں مثبت اصل یعنی چاہیئے، پس  $\frac{15}{3} = 5$  (۱۵-۱) اس طرح جم ۲۰ = جب  $\frac{1}{12}\pi = 5$  (۱۵-۱) اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے جب  $\frac{1}{12}\pi = 5$  (۱۵-۱) نیز جم ۳۶ =  $\frac{1}{12}\pi$  کیونکہ د ج ایک متساوی الساقین مثلث ہو اس لئے جم ۳۶ =  $\frac{1}{12}\pi$  (۱۵+۱) پس جب  $\frac{1}{12}\pi = 5$  (۱۵+۱) نیز چونکہ ۳۶ کا مقسم ۵ ہے اس لئے جب ۵ اور جم ۵ کی قیمتیں بھی حاصل ہو جاتی ہیں۔  
ذیل کی جدول میں محصلہ قیمتیں حوالہ کے لئے اکٹھی کی گئی ہیں:-  
پہلی سطر کے تقاضے پہلے ستون کے زاویوں کے لحاظ سے ہیں اور آخری سطر کے تقاضے آخری ستون کے زاویوں کے لحاظ سے

	جیب	جیب التمام	ماس	ماس التمام	
$15 = \pi \frac{1}{12}$	$\frac{15 - \sqrt{15}}{2}$	$\frac{15 + \sqrt{15}}{2}$	$15 - 2$	$15 + 2$	$25 = \pi \frac{5}{12}$
$18 = \pi \frac{1}{10}$	$\frac{18 - \sqrt{18}}{2}$	$\frac{18 + \sqrt{18}}{2}$	$18 - 2$	$18 + 2$	$20 = \pi \frac{2}{5}$
$30 = \pi \frac{1}{6}$	$\frac{30 - \sqrt{30}}{2}$	$\frac{30 + \sqrt{30}}{2}$	$30 - 2$	$30 + 2$	$40 = \pi \frac{1}{3}$
$36 = \pi \frac{1}{10}$	$\frac{36 - \sqrt{36}}{2}$	$\frac{36 + \sqrt{36}}{2}$	$36 - 2$	$36 + 2$	$50 = \pi \frac{1}{10}$
$45 = \pi \frac{1}{8}$	$\frac{45 - \sqrt{45}}{2}$	$\frac{45 + \sqrt{45}}{2}$	$45 - 2$	$45 + 2$	$60 = \pi \frac{1}{6}$
	جیب التمام	جیب	ماس التمام	ماس	



اب ہم ضوابط (۶) تا (۱۱) استعمال کر کے کسی ایسے زاوے کے دائری تفاعل فوراً حاصل کر سکتے ہیں جو اوپر کی جدول میں مندرجہ زاویوں میں سے کسی زاویہ سے زاویہ قائمہ کے کسی ضعف کا فرق رکھتا ہو۔  
مثال :- ۱۲۰ اور ۵۶ کی جیب اور جیب التمام معلوم کر دو۔

(82)

$$\text{چونکہ } ۱۲۰ = ۹۰ + ۳۰ \text{، اس لئے}$$

$$\text{جیب } ۱۲۰ = \text{جیب } ۳۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{جیب } ۱۲۰ = \text{جیب } ۳۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{نیز چونکہ } ۵۶ = (۳۶ + ۱۸۰ \times ۳) \text{، اس لئے}$$

$$\text{جیب } (-۵۶) = \text{جیب } (۳۶ - ۱۸۰) = \text{جیب } ۳۶$$

$$\text{اور جیب } (-۵۶) = \text{جیب } (۳۶ - ۱۸۰) = -\text{جیب } ۳۶$$

### مقلوب دائری تفاعل

۳۵۔ اگر ما، لا کا تفاعل ف (لا) ہے تو لا کو ما کا ایک تفاعل سمجھا جاسکتا ہے۔ اس تفاعل کو ف (لا) کا مقلوب تفاعل کہتے ہیں اور اس کو بانوم ف (ما) سے تعبیر کرتے ہیں، اس طرح لا = ف (ما)، اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دورک ہے اور اس لئے ف (لا) = ف (لا + م) جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے تو تفاعل ف (ما) کی قیمتیں تعداد میں لا انتہا ہو چکی جو لا + م کے سے حاصل ہوں گی جبکہ لا، ف (ما) کی کوئی ایک قیمت ہو، م کے ایسے تفاعل کو کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں، کیونکہ متغیر ما کی ہر قیمت کے جواب میں اس کی ایک واحد قیمت نہیں ہوتی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوری تفاعل ف (لا) = ما کے متناظر ایک کثیر قیمتی مقلوب تفاعل ف (ما) ہے جس کی قیمتوں کی تعداد ما کی کسی ایک قیمت کے لئے لا انتہا ہے، یہ

قیمتیں ایک دوسرے سے اتنا فرق رکھتی ہیں جو ف (لا) کے دور کے کسی ضعف کے مساوی ہوتا ہے۔

۳۴۔ اگر صفر اور گ کے درمیان واقع ہونیوالی لاکہ دو یا دو سے زیادہ قیمتیں ہوں جن کے لئے ف (لا) کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو ف (ما) کی قیمتوں کی کثرت اور بڑھ جاتی ہے، کیونکہ ف (ما) کی قیمتوں میں اول تو لاکہ ہر وہ قیمت ہے جس کے لئے ف (لا) = ما اور پھر قیمتوں کے وہ لا متناہی سلسلے ہیں جو لاکہ ہر قیمت میں ک کے ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ صفر اور گ کے درمیان لاکہ دو قیمتیں  $\frac{1}{2}$  ہیں جن کے لئے ف (لا) = ما تو مقلوب تفاعل ف (ما) کی قیمتوں کے دو جٹ  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  م ک،  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ن ک ہیں۔

۳۵۔ دائرہ تفاعل جب لا = ما کی صورت میں مقلوب تفاعل جب (ما) کی قیمتیں  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  (۱) ہیں جس میں  $\frac{1}{2}$  لاکہ کوئی قیمت ہے جس کے لئے جب لا = ما، اس صورت میں جب لا کا مکمل دور  $\frac{1}{2}$  ہے، اور صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان لاکہ دو قیمتیں ہیں (فرض کرو)  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  = لا جن کے لئے جب لا = ما پس جب (ما) کی قیمتوں کے دو سلسلے  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  = لا ہیں اور یہ دونوں سلسلے  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  (۱) میں شامل ہیں اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جم (ما) کی قیمتیں  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  لا میں شامل ہیں، جہاں جم لا = ما۔

(38) تفاعل مس لا، مم لا کے دور  $\frac{1}{2}$  ہیں جو جب لا اور جم لا کے دور کا صرف نصف ہیں، اور صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان لاکہ صرف ایک قیمت ہے جس کے لئے مس لا یا مم لا ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرتا ہے، اس طرح مس (ما) کی قیمتیں  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  لا ہیں اور مم (ما) کی قیمتیں  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  لا جہاں لا صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان لاکہ وہ قیمت ہے جس کے لئے مس لا = ما یا مم لا = ما۔

۳۸۔ اگر لا عدد وادہ چھوٹی سے چھوٹی مقدار ہو جس کی علامت وہی ہے جو ا کی ہے اور جس کے لئے جب لا = ما تو اس چھوٹی سے چھوٹی مقدار لا کو جب ا کی صدر قیمت کہتے ہیں۔ مس تا، مم تا، قم تا کی صدر قیمتوں کی تعریف بھی اسی طرح کیجا سکتی ہے اگر لا عدد وادہ چھوٹی سے چھوٹی قیمت مقدار ہو جس کے لئے جم لا = ما تو اس کو جم تا کی صدر قیمت کہتے ہیں، ایسی ہی تعریف قطا کی صدر قیمت کے لئے استعمال ہوگی۔

اس طرح جب تا، مس تا، مم تا، قم تا کی صدر قیمتیں  $\frac{1}{2}\pi$  کے درمیان واقع ہوتی ہیں، اور جم تا، قطا کی صدر قیمتیں صفراور  $\pi$  کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ بعض تصنیفات میں جب تا، جم تا، مس تا کی صدر قیمتوں کو جب تا (Sin<sup>-1</sup> y)، جم تا (Cos<sup>-1</sup> y)، مس تا (Tan<sup>-1</sup> y) سے تعبیر کیا جاتا ہے، تب عام قیمتیں اس طرح لکھی جاتی ہیں:-

$$\text{جب تا} = \pi - (1 - \text{جم تا}) = \pi - \text{جم تا}$$

$$\text{مس تا} = \pi - \text{مس تا}$$

لیکن ہم یہ ترقیم استعمال نہیں کریں گے۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بہت سی مساواتوں میں جن میں یہ مقلوب تفاعل موجود ہونے میں یہ فرض کرنا ضروری ہے کہ ان تفاعلوں کی صرف صدر قیمتیں استعمال ہوتی ہیں یا بہر صورت قیمتوں کا انتخاب محدود ہے۔ مثلاً جب تا + جم تا =  $\frac{1}{2}\pi$  جیسی مساوات میں مقلوب تفاعلوں کی قیمتوں کا انتخاب محدود و مقید ہے یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ تفاعلوں جم تا، جب تا کی تعریف مائگی صرف ان قیمتوں کے لئے کی گئی ہے جو  $\frac{1}{2}\pi$  کے درمیان واقع ہیں، مائگی ان حدود کے باہر یہ تفاعل کوئی معنی نہیں رکھتے جب تک کہ وہ موجودہ تعریف کے تحت ہیں۔ طالب علم کو مشتق کے طور پر مختلف مقلوب تفاعلوں کی تربیں کھینچنا چاہیے۔ یورپ کے دیگر ممالک کی تصانیف



۹۔ ط کے لئے ایک عام جملہ معلوم کرو جبکہ جب ط = جب لمحہ اور نیز جبکہ

$$\text{جب ط} = - \text{جم ط} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۰۔ ان حدود کی عام قیمتیں دریافت کرو جن کے درمیان ان کی تمام قیمتوں کے لئے

جب ۱ و ۲ جم ۱ سے بڑا ہو۔

۱۱۔ ط کی عام قیمت معلوم کرو جبکہ ۹ قط ط = ۱۶

۱۲۔ اگر مس (۲) عم ط = عم (۲) مس ط

$$\text{مس ط} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ 1 \pm \sqrt{1 + 2n + n^2 - 15} \}$$

جہاں n کوئی صحیح عدد ہے جو ایک اور ۲ کے درمیان واقع نہیں ہے۔

۱۳۔ ایک دئے ہوئے زاویے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنے کا ہندسی طریقہ بیان کرو کہ ان دو حصوں کی (۱) جوب، (۲) ماس ایک دی ہوئی نسبت میں ہوں۔

۱۴۔ وہ زاویہ بناؤ جس کا ماس ۳۔ ۴ ہے۔

۱۵۔ ایک دئے ہوئے زاویہ کو دو حصوں میں تقسیم کرو جن کی جیب اتنا ہوں گا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار ج ہو۔ وہ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو ج اختیار کر سکتا ہے۔

۱۶۔ اگر عم = جم ن ط + جب ن ط

تو ثابت کرو کہ ۲ - ۴ - ۳ عم ۱ + ۱ = ۰

$$۴ - ۶ - ۱۵ عم ۱۰ + ۱ = ۰$$

۱۷۔ دو دائرے، (نیم قطر ا ب) ایک دوسرے کو خارجاً مماس کرتے ہیں اور ط وہ زاویہ ہے جو ان دائروں کے مشترک مماسوں کے درمیان ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط} = \frac{۴(ا ب) (ا ب)}{(ا ب)^2}$$

(35)

۱۸۔ ایک مخروط مضلع کا قاعدہ ضلع و کا مربع ہے، اس کا اس قاعدہ کے نقطہ وسطی میں سے گزرنے والے ایک خط پر واقع ہے جو قاعدہ پر عمود ہے، نیز اس قاعدہ سے ف فاصلہ پر واقع ہے۔  
ثابت کرو کہ دو متصلہ رخوں کے درمیان زاویہ ع اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب ع} = \frac{\text{ف}^2 + \frac{1}{4} \text{ا}^2 + \frac{1}{4} \text{ب}^2}{\frac{1}{4} \text{ا}^2 + \frac{1}{4} \text{ب}^2}$$

۱۹۔ دو مستوی ایک دوسرے کو علی القوائم خط ا ب پر قطع کرتے ہیں اور ایک تیسرا مستوی ان کو خطوط ا د، ا ج پر قطع کرتا ہے، اگر زاویوں د ا ب، ج ا ب کو علی الترتیب ع، ہ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ ب ا جو زاویہ مستوی ج ا د سے جاتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{مس}^1 = \frac{\text{مس}^2 \times \text{مس}^3}{\text{مس}^4 + \text{مس}^5}$$

۲۰۔ اگر ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح کا وتر و د ہو تو ثابت کرو کہ و د اور اُس رخ کے وتروں کے درمیان جس کے متصلہ اضلاع و ا ہو ب ہیں جو زاویے بنتے ہیں اُن کے جیب التمام علی الترتیب ہیں

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{و د}} \text{ اور } \frac{\text{و ا}}{\text{و ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{و د}}$$

۲۱۔ دو دائرے جن کے نیم قطروں کا مجموعہ ا ہے ایک ہی مستوی میں رکھے گئے ہیں اس طرز پر کہ ان کے مرکز ۲ فاصلہ پر ہیں۔ ایک بے سرا تاگا خوب تناہوا دائروں کو گھیرتا ہے اور ان کے درمیان خود کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تاگے کا طول  $(\frac{1}{2} \sqrt{4 + 4})$  ہے۔  
۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم مس}^1 \text{ جب تم}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{1}{4} \text{ا}^2}{\frac{1}{4} \text{ا}^2 + \frac{1}{4} \text{ب}^2} \right)$$

۲۳۔ تفاعلات ۳ جب لا + ۴ جم لا، و لا جب لا، اور جب  $\left(\frac{3}{4}\right)$  جب لا  
 کی مقدار اور علاست کی تبدیلیاں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ترسیمی طور پر ظاہر کرو۔  
 ثابت کرو کہ مساوات  $۲ = (۲ن + ۱)$  سہ لا کی حقیقی اصولوں کی تعداد  
 $۲ن + ۳$  ہے اور اس سے زیادہ نہیں، جہاں  $ن$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے، انکے  
 مقامات تقریبی طور پر بتاؤ۔

---

## چوتھا باب

(86)

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفعال  
جیب اور جیب التمام کے لئے جمع اور تفریق کو ضابطے

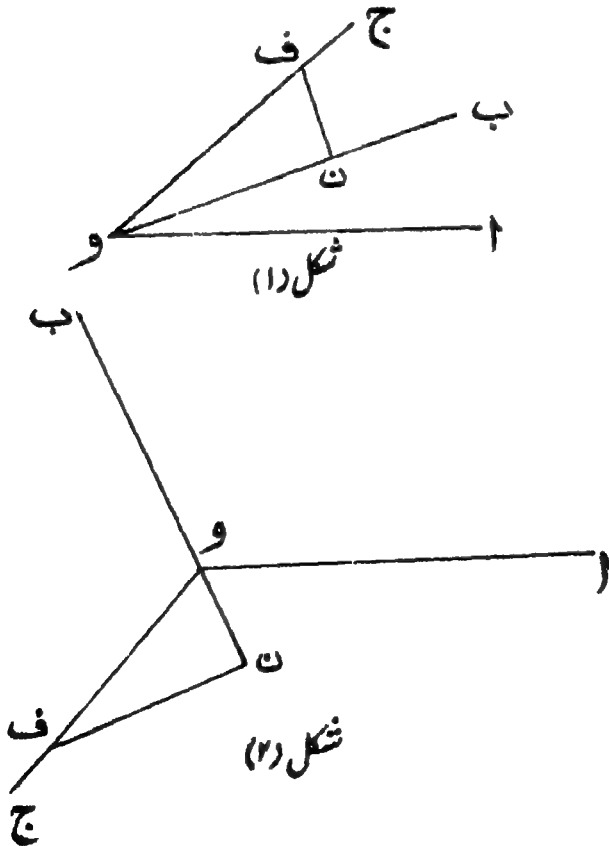
۳۹۔ اب ہم دو زاویوں کے مجموعہ اور فرق کے دائری تفعالوں کے لئے جملے ان زاویوں کے دائری تفعالوں کی رقوم میں معلوم کریں گے۔ فرض کرو کہ کسی مقدار  $a$  کا ایک زاویہ  $A$  و  $B$  مثبت یا منفی، ایک خط مستقیم سے متکون پاتا ہے جو  $O$  کے گرد ابتدائی محل  $OA$  سے گھومتا ہے یہ حالیکہ زاویہ کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے، اور نیز فرض کرو کہ کسی مقدار  $b$  کا ایک زاویہ  $B$  و  $C$  ایک خط مستقیم سے مرسم ہوتا ہے جو ابتدائی محل  $OB$  سے گھومتا ہے۔ تب زاویہ  $AOC = A + B$ ۔ و  $C$  میں کوئی نقطہ  $F$  لو، اور  $OB$  پر  $F$  ان عمود کھینچو۔

دفعہ ۵۔ اکی قرارداد کے مطابق خط مستقیم  $ON$  مثبت یا منفی ہے بوجہ اس کے کہ وہ  $OB$  میں ہو یا  $OB$  ممدودہ میں، نیز  $ON$  مثبت ہے جبکہ وہ  $OB$  کی مثبت جانب واقع ہو اور مخالف سمت ساعت میں گھومے اور منفی ہے جبکہ وہ دوسری جانب واقع ہو۔ اس خط مستقیم کی مثبت سمت جس پر  $ON$  واقع ہے  $OA$  کے ساتھ زاویہ  $A + 90^\circ$  بناتی ہے۔  
 $ON = OF$  جب  $ON$   $F$ ۔  $OF$  جب  $B$ ، کیونکہ  $ON$  اور  $OF$

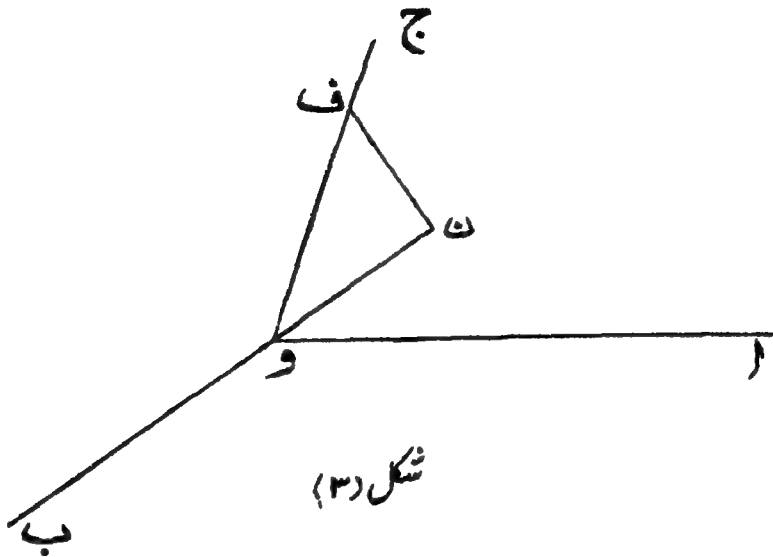


ظل میں وف کے وب پر اور اُس خط پر جو د کے ساتھ  $۹۰ + ۱$  کا زاویہ بناتا ہے۔

شکل (۱) میں زاویوں ا ب میں سے ہر ایک مثبت ہے اور  $۹۰$  سے کم، شکل (۲) میں  $۹۰$  اور  $۱۸۰$  کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب بھی  $۹۰$  اور  $۱۸۰$  کے درمیان واقع ہے، شکل (۳) میں زاویہ ا  $۱۸۰$  اور  $۲۷۰$  کے درمیان واقع ہے، اور زاویہ ب منفی ہے اور  $-۹۰$  اور  $-۱۸۰$  کے درمیان واقع ہے۔ اشکال (۱) اور (۲) میں ن ف کا طول مثبت ہے اور شکل (۳) میں ن ف کا طول منفی ہے کیونکہ اس آخری صورت میں ف ن اُس خط کی سمت ہے جو د کے ساتھ  $۹۰ + ۱$  کا زاویہ بناتی ہے۔



(37)



(38) اب دقت میں بیان کر وہ خطوں کے اساسی مسئلہ کی رو سے وف کا ظل داہرہ = ون کا ظل داہرہ + ن ف کا ظل داہرہ، یا  
 وف جم (ا + ب) = ون جم (ا + ن) + ن ف جم (ا + ۹۰)

$$= \text{وف جم (ا + ب) + وف جب ب جم (ا + ۹۰)}$$

اس لئے جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جم ب ..... (۱)  
 اگر مثلث دن ف کے ضلعوں کے ظل داہرہ لینے کی بجائے اُنکے  
 ظل اُس خط پر لئے جائیں جو د ا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے تو

$$\text{وف جب (ا + ب) = ون جب ا + ن ف جب (ا + ۹۰)}$$

$$= \text{وف جب ا جم ب + وف جب ب جم (ا + ۹۰)}$$

اس لئے جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ب جم ب ..... (۲)

اس طرح ضوابط (۱) اور (۲) مثبت اور منفی تمام مقداروں کے زاویوں

کے لئے ثابت ہو چکے۔ زاویوں ۱ اور ۲ کی مختلف مقداروں کے لئے طالب علم کو مندرجہ ذیل شکل بنانی چاہیئے تاکہ خود اس کو ثبوت کی عمودیت کا یقین ہو جائے۔  
اگر ہم مضابطوں (۱) اور (۲) میں سے ہر ایک میں ب کو - ب میں بدل دیں تو

$$\text{جم (ا-ب)} = \text{جم (ب-ا)} - \text{جم (ب-ب)}$$

$$\text{اور جم (ا-ب)} = \text{جم (ب-ا)} + \text{جم (ب-ب)}$$

$$\text{پس جم (ا-ب)} = \text{جم (ب-ا)} + \text{جم (ب-ب)}$$

$$\text{جم (ب-ا)} = \text{جم (ب-ب)} - \text{جم (ب-ب)}$$

یہ مضابطے (۳) اور (۴) بلا واسطہ اس طرح بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں کہ شکل میں زاویہ ب منفری سمت میں بنایا جائے، تب زاویہ ف و د، ا - ب کے مساوی ہو گا۔

۴۔ مضابطوں (۱)، (۲) اور (۳) کو علی الترتیب جمع اور تفریق کے مضابطے کہتے ہیں، مضابطوں (۱) اور (۲) میں سے کسی ایک کو دوسرے سے اخذ کیا جاسکتا ہے، (۱) میں ا کی بجائے ۹۰ + ا لکھو تو

$$\text{جم (۹۰ + ا + ب)} = \text{جم (۹۰ + ا)} - \text{جم (ب)}$$

$$\text{یا جم (ا + ب)} = \text{جم (۹۰ + ا)} - \text{جم (ب)}$$

اور اس مساوات کی طرفین میں علامتیں بدلنے سے مضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے، اسی طرح (۲) میں ا کی بجائے ۹۰ + ا لکھ کر (۱) کو حاصل کیا جاسکتا ہے پس یہ نتیجہ نکلا کہ یہ چاروں اساسی مضابطے فی الحقیقت ان میں سے کسی ایک میں شامل ہیں۔

۴۔ کوئی نے جمع اور تفریق کے مضابطوں کا جو ثبوت دیا ہے وہ جب ذیل ہے۔  
و کمر زمان کر یک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ نیم قطرف اور وق، و ا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۱ اور ۲ بنائے ہیں، ف ق کو لاد، اور د ل پر ف مرقن



جاتے ہیں جن میں سے بعض صرف اُن زاویوں پر اطلاق پذیر ہوتے ہیں جو قیمتوں کی ایک محدود وسعت کے درمیان واقع ہوں اور اُس لئے انکی توسیع اُن صورتوں میں کرنی پڑتی ہے جب زاویوں کی مقدار میں اس وسعت کے باہر ہوں۔ ہم اس قسم کی توسیع پہلے ایسے ضابطوں کے لئے کریں گے جو ا اور ب کی منفرد اور ۹۰ کے درمیان قیمتیں لیکر ثابت کئے گئے ہیں۔ ا اور ب خواہ کچھ ہی ہوں زاویوں ا اور ب کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے جو منفرد اور ۹۰ کے درمیان ہوں ایسے کہ  $\Delta = m \times 90 + d$  ،  
 $b = n \times 90 + b$  جن میں m اور n مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں، جب  
 جم (ا + ب) = جم (م + ن)  $90 + (d + b)$  !

(40)

(۱) اگر م اور ن دونوں جنت ہوں تو

$$\text{جم (ا + ب)} = \frac{m+n}{1} \text{ جم (ا + ب)}$$

$$= \frac{m+n}{1} \text{ (جم ا + جم ب - جب ا + جب ب)}$$

اب جم ا = (۱ -  $\frac{m+n}{1}$ ) جم ا ، جب ا = (۱ -  $\frac{m+n}{1}$ ) جب ا  
 اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔

پس جم (ا + ب) = جم ا + جم ب - جب ا + جب ب

(۲) اگر م اور ن دونوں طاق ہوں تو

$$\text{جم (ا + ب)} = \frac{m+n}{2} \text{ جم (ا + ب)} = \frac{m+n}{2} \text{ (جم ا + جم ب - جب ا + جب ب)}$$

$$\text{جب ا} = \frac{m+n}{2} \text{ (جم ا + جم ب - جب ا + جب ب)}$$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔ پس جم ا + جم ب - جب ا + جب ب  
 جب ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں حسب سابق جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر م طاق ہو اور ن جنت تو

$$\text{جم (ا + ب)} = \frac{1 + \sin \theta}{2(1 - \theta)} \text{ جم (زق + دآ + ب)}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{2(1 - \theta)} \text{ جب (آ + ب)}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{2(1 - \theta)} \text{ (جب ڈ جم ب + جم آ جب ب)}$$

لیکن جم ا =  $\frac{1 + \sin \theta}{2(1 - \theta)}$  جب ڈ ، جم ب =  $\frac{1}{2(1 - \theta)}$  جم ب ،

جب ا =  $\frac{1}{2(1 - \theta)}$  جم آ ، جب ب =  $\frac{1}{2(1 - \theta)}$  جب ب ،

اس لئے حسب سابق اندراج کرنے سے ، جم (ا + ب) کے لئے دہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے ضابطوں کی توسیع بھی اسی طرح عمل میں آسکتی ہے۔

۴۴ - جمع کے ضابطے جس شکل میں یونانیوں کو معلوم تھے وہ ٹولمی

کا مسئلہ ہے جو اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ (۵۰) میں مذکور ہے ،

یہ مسئلہ یہ ہے کہ اگر ا ب ج د ایک چار ضلعی ہو جو ایک دائرے کے اندر

بنایا گیا ہے تو ا ب × ج د + ا د × ب ج = ا ج × ب د - کوئی وتر ا ب

اس زاویہ کے نصف کی جیب ہوتی ہے جو دائرے کے مرکز پر ا ب کے عمادی

بنایا گیا ہو جبکہ دائرہ کا قطر اکائی تسلیم کیا جائے ، یہ نصف زاویہ وہ زاویہ

ہے جو قوس ا ب کے عمادی محیط کے کسی نقطہ پر بنتا ہے۔ ہم اب یہ

بتائیں گے کہ جب (ع ± ب) اور جم (ع ± ب) کے ضابطے ٹولمی کے مسئلہ

میں شامل ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ب د ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = ع ،

ب د ج = ب ، تب ا ب د =  $\frac{1}{2}$  - ع ، د ب ج =  $\frac{1}{2}$  - ب ،

لے دیکھو انسائیکلو پیڈیا ریٹانیکا (اشاعت نہم) میں مضمون  
”ٹولمی“۔

۱ ج = جب (ع + ہ) = ا ب = جب ع، اور ج د = جم ہ، اس طرح مسئلہ بالا ضابطہ کے مائل ہے۔  
 جب (ع + ہ) = جب ع جم ہ + جم ع جب ہ

(۲) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = ع،  
 ۱ ج د = ہ، تو ا ب = جب (ع - ہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ  
 جب (ع - ہ) + جب ہ جم ع = جم ہ جب ع کے مائل ہے۔

(۳) فرض کرو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = ع،  
 زاویہ ج ب د = ہ، تو ا ج د = ۱/۲ + ع - ہ، اس طرح ۱ ج =  
 جم (ع - ہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جم (ع - ہ) = جم ع جم ہ + جب ع جب ہ کے مائل ہے۔

(۴) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = ع،  
 ا ج = ہ، تب ب ج د = ع + ہ - ۱/۲، ا ب = جم (ع + ہ) اور  
 مسئلہ بالا ضابطہ

جم (ع + ہ) + جم ع جم ہ = جب ع جب ہ کے مائل ہے۔

مثال۔ سائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو۔

جب ع جب (ہ - ج) + جب ہ جب (ج - ع) + جب ج جب (ع - ہ) =

جب ز (ع - ہ) جب (ہ - ج) = جب ع جب ج + جب ہ جب (ع + ہ + ج)

دو چوب یا دو چوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطہ

۴۴۔ جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب،

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب  
 جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب  
 فرض کرو ۱ + ب = ج ، ۱ - ب = د ، تو چونکہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (ج + د) اور  
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (ج - د) ، اس لئے حسب ذیل منابطے حاصل ہوتے ہیں۔  
 جب ج + جب د = ۲ جب ا جب ب  $\frac{1}{2}$  (ج + د) جم  $\frac{1}{2}$  (ج - د) .. (۵)  
 جب ج - جب د = ۲ جم ا جم ب  $\frac{1}{2}$  (ج + د) جب  $\frac{1}{2}$  (ج - د) .. (۶)  
 جم ج + جم د = ۲ جم ا جم ب  $\frac{1}{2}$  (ج + د) جم  $\frac{1}{2}$  (ج - د) .. (۷)  
 جم د - جم ج = ۲ جب ا جب ب  $\frac{1}{2}$  (ج + د) جب  $\frac{1}{2}$  (ج - د) .. (۸)

(42) یہ اہم منابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیب یا جیب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تفاعلوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں، ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

دو زاویوں کی جیب کا مجموعہ ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب کا فرق ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

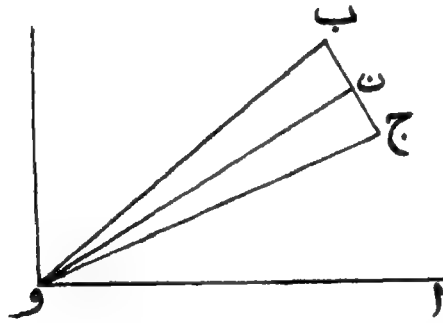
دو زاویوں کی جیب التمام کا مجموعہ ، ان زاویوں کے



نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دو چند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیب التمام کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُن کے نصف فرق کی جیب کے دو چند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵۔ یہ ضابطے ہندسی طور پر غلوں کے طریقہ سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔



فرض کر دو ب = د + ج، ج = د + ج، ج = د + ج اور فرض کر دو ب = د + ج، ب ج پر عمود ون کھینچو تو ن ب ج کا نقطہ وسطی ہے، نیز

ن د =  $\frac{1}{2}(د + ج)$ ، ن ب = د، ن ج =  $\frac{1}{2}(ج - د)$   
اب د پر د ب اور د ج کے غلوں کا مجموعہ، د پر د ن، ن ب، ون اور ن ج کے غلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور ن ج کے غل مساوی اور مختلف علامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ ون کے غل کے دو چند کے مساوی ہے۔ اس لئے

$$د ب جم + ج + د ج جم = د + ون جم = \frac{1}{2}(د + ج)$$

اور چونکہ

$$\text{ون} = \text{وب} \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$$

اس لئے ضابطہ

$$(43) \quad \text{جم ج} + \text{جم د} = 2 \text{ جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (6)$$

حاصل ہوتا ہے۔  
اگر وہاں پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوائم خط پر ظل لئے جائیں تو  
وب جب ج + وج جب د = 2 ون جب  $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$   
اس لئے

$$\text{جب ج} + \text{جب د} = 2 \text{ جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \text{جم } \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \dots \dots (5)$$

نیز دہر وج کا ظل = وب کا ظل + ب ن کے ظل کا دو چند  
یعنی

$$\text{وج جم د} = \text{وب جم ج} + 2 \text{ ب ن جب } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$$

اس لئے جم د - جم ج = 2 جب  $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$  جب  $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$  (۸)  
اور اگر ہم وہاں پر کے عمود پر ظل لیں تو

$$\text{وج جب د} = \text{وب جب ج} - 2 \text{ ب ن جم } \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \dots \dots (6)$$

یا جب ج - جب د = 2 جب  $\frac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$  جم  $\frac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$  (۶) ....  
نو کار متوں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جو ب کی  
جدولوں کے ذریعہ ضرب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

$$\text{جب د جب ب} = \frac{1}{2} \{ \text{جم (د - ب)} - \text{جم (د + ب)} \}$$

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاوئے د اور ب جن کی جو ب، علامت اعشاریہ کو نکال دینے  
کے بعد، ان اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو ضرب دینا مقصود ہوتا ہے جو ب کی ایک  
جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (د + ب) ،  
جم (د - ب) معلوم ہو سکتی ہیں، ان آخری جو ب اتمام کے فری کا نصف مطلوب

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو  $\pi\mu\sigma\sigma\alpha\phi\alpha\epsilon\mu\epsilon\sigma\iota$  کہتے تھے۔ گلیشر کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry" میں جو فلا سینکل میگزین بابہ ۳۸۸ میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

## امثلہ

۱۔ ثابت کرو مثلاً

$$\begin{aligned} & \text{جب (ب-ج) جب (ب+ج-۱) + جب ب جب (ج-۱) =} \\ & \text{جب (ج+۱-ب) + جب ج جب (۱-ب) جب (۱+ب-ج) =} \\ & \text{۲ جب (ب-ج) جب (ج-۱) جب (۱-ب)} \\ & \text{دائیں جانب کی دوسری اور تیسری اقام لکھی جاسکتی ہیں} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \text{ جب ب } \{ \text{جم (ب-۱۲)} - \text{جم (ج-ب)} \} + \frac{1}{2} \text{ جب ج } \{ \text{جم (ج-۲ب)} - \text{جم (ب-۲)} \} = \text{جم (۲-ج-۱)}$$

$$\begin{aligned} \text{اور یہ} &= \frac{1}{2} \{ \text{جب ۲ (ج-۱)} + \text{جب ۲-۱- جب ۲ ج- جب ۲ (ب-ج)} \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \text{جب ۲ (ج-ب)} + \text{جب ۲ ب- جب ۲-۱- جب ۲ (ج-۱)} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{جب ۲ ب- جب ۲ ج-} \} + \frac{1}{2} \{ \text{جب ۲ (ب-ج)} + \text{جب ۲ (ب-۱- جب ۲ (ج-۱)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{جب (ب-ج)} \{ \frac{1}{2} \text{ جم (ب+ج)} - \text{جم (ب-ج)} \} + \frac{1}{2} \text{ جم (ب+ج-۱-۲)} \\ &= \text{جب (ب-ج)} \{ \text{جم ۱ جم (ب+ج-۱-۲)} - \text{جم (ب-ج)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{اس میں رقم جب (ب-ج) جب (ب+ج-۱) جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے} \\ & \text{جب (ب-ج) } \{ \text{جم (ب+ج-۱-۲)} - \text{جم (ب-ج)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{یعنی ۲ جب (ب-ج) جب (ج-۱) جب (۱-ب)} \\ & \text{(۲) - ثابت کر دو} \end{aligned}$$

$$\text{۳ جم (ب-ج) جب (ب+ج-۱)}$$

۲ = جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)  
اسکو مثال (۱۱) سے ا، ب، ج کو ۹۰ - ۹۰ - ۹۰ ب - ۹۰ - ج  
میں تبدیل کر کے اخذ کیا جاسکتا ہے، یا بلا واسطہ مثال (۱۱) کی طرح ثابت  
کیا جاسکتا ہے۔  
مثانلات ذیل ثابت کرو:

- (۳)  $\angle$  جب (ب - ج) =  $\angle$  جم (ا جب (ب - ج) =  
(۴)  $\angle$  جب (ب + ج) جب (ب - ج) =  $\angle$  جم (ب + ج) جب (ب - ج)  
(۵)  $\angle$  جب (ب جب ج جب (ب - ج) =  $\angle$  جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)  
 $\angle$  جم (ب جم ج جم (ب - ج) =  $\angle$  جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)  
(۶) اگر  $\angle$  +  $\angle$  +  $\angle$  =  $\pi$  ثابت کرو کہ

جب  $\angle$  = جب  $\angle$  + جب  $\angle$  - جب  $\angle$  جب ج جم  
اور جم  $\angle$  = ا - جم  $\angle$  ب - جم  $\angle$  ج - جم  $\angle$  جم ب جم ج  
مشقی مثانلات کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے جبری مثانلات کے ماثل ہے  
مثلاً حسب ذیل جبری مثانلات مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں ہیں:-

$\angle$  (ا - ب - ج) (ب + ج - ا) =  $\angle$  (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)  
(۱) اور (۲) کے جواب میں

$\angle$  (ا - ب - ج) =  $\angle$  (۳) کے جواب میں  
 $\angle$  (ب + ج) (ب - ج) =  $\angle$  (۴) کے جواب میں  
 $\angle$  ب ج (ب - ج) =  $\angle$  (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (۵) کے جواب میں

لے ایسی مطابقات کی ایک کثیر تعداد ایم۔ گیس (M. Gelin) نے "Macheries" جلد دوم میں دی ہے۔

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

## ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

۴۶۔ جب اور جب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے ماس یا ماس التمام کے لئے ان زاویوں کے ماس یا ماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس (ا + ب)} = \frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جم (ا + ب)}} = \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جم ا + جم ب}} = \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جم ا + جم ب}}$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور بسب نام کو جم ا + جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{\text{مس (ا + ب)}}{\text{جم ا + جم ب}} = \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جم ا + جم ب}} = 1$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$(4) \quad \text{مس (ا + ب)} = \frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{مس ا + مس ب}}$$

$$(10) \quad \text{مس (ا - ب)} = \frac{\text{مس ا - مس ب}}{\text{مس ا + مس ب}}$$

(45) اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(11) \quad \text{مم (ا + ب)} = \frac{\text{مم ا + مم ب}}{\text{مم ا + مم ب}}$$

$$(12) \quad \text{مم (ا - ب)} = \frac{\text{مم ا - مم ب}}{\text{مم ا + مم ب}}$$

ضوابط (۹) تا (۱۲) ماس اور ماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

ہیں۔

### مختلف ضوابط

۷م۔ حسب ذیل ضابطے اُن ضابطوں سے اخذ کئے جاسکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں سے لئے حاصل کئے ہیں۔  
یہ ضابطے استحالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔  
طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کر لینی چاہیئے۔

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا \text{ جب } ب = \text{جم } ا - \text{جم } ب \dots (۱۳)$$

$$\text{جم } (ا + ب) \text{ جم } (ا - ب) = \text{جم } ا - \text{جم } ب = \text{جب } ا - \text{جب } ب \dots (۱۴)$$

$$\text{جب } (ا + ب) \text{ جم } (ا - ب) = \text{جب } ا \text{ جم } ب + \text{جب } ب \text{ جم } ا \dots (۱۵)$$

$$\text{جم } (ا + ب) \text{ جب } (ا - ب) = \text{جب } ا \text{ جب } ب - \text{جب } ب \text{ جم } ا \dots (۱۶)$$

$$\text{جب } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۱۷)$$

$$\text{جم } (ا + ب) = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جم } (ا - ب)} \dots (۱۸)$$

$$\text{مس } ا \pm \text{مس } ب = \frac{\text{جب } (ا \pm ب)}{\text{جم } ا \text{ جم } ب} \dots (۱۹)$$

دوجیب یا جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں ذرا حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{جب } ا + \text{جب } ب = \frac{\text{مس } ا + \text{مس } ب}{\text{جب } (ا - ب)} \dots (۲۰)$$

$$\text{جب } ا - \text{جب } ب = \frac{\text{مس } ا - \text{مس } ب}{\text{جم } (ا + ب)} \dots (۲۱)$$

$$(۲۲) \quad \frac{\text{ج ب} \pm \text{ج ب ب}}{\text{ج ب ب} - \text{ج ب}} = \text{م م} \frac{1}{2} (ا + ب) \dots\dots (۲۲)$$

$$(۲۳) \quad \frac{\text{ج ب} + \text{ج ب ب}}{\text{ج ب ب} - \text{ج ب}} = \text{م م} \frac{1}{2} (ا + ب) \text{م م} \frac{1}{2} (ا - ب) \dots\dots (۲۳)$$

## مثالیں

(46)

۱۔ ثابت کرو مثلاً

$$\begin{aligned} & ۱۔ \text{ج} ۱ - \text{ج} ۲ ب - \text{ج} ۳ ج + ۲ \text{ج ب} (ج ب ج ج) \\ & = \text{ج ب} \frac{1}{2} (ا + ب + ج) (ج ب \frac{1}{2} (ا + ب + ج) (ج ب \frac{1}{2} (ا - ب + ج) + ج) \times \\ & \text{ج ب} \frac{1}{2} (ا + ب + ج) \end{aligned}$$

دائیں جانب کا جملہ لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} & - \text{ج} ۲ - \text{ج} ۱ (ج ب + ج) (ج ب - ج) + \text{ج} ۳ (ج ب + ج) + \text{ج} ۴ (ج ب - ج) \{ \\ & \text{ج ب ج ج} \} \text{ج ب} \frac{1}{2} (ج ب + ج) \{ \text{ج ب} \frac{1}{2} (ج ب - ج) - \text{ج} ۱ \} \text{ج ب} \frac{1}{2} (ج ب - ج) - \\ & \text{اب ان میں سے ہر جزو ضربی کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے بائیں} \\ & \text{جانب کا جو حاصل ہوتا ہے۔ اگر} \pm \text{ج} ۱ \pm \text{ج} ۲ \pm \text{ج} ۳ کا نصف ہو تو \\ & ۱۔ \text{ج} ۱ - \text{ج} ۲ ب - \text{ج} ۳ ج + ۲ \text{ج ب} (ج ب ج ج) = ۰ \\ & \text{یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔} \\ & ۲۔ ثابت کرو کہ$$

$$\begin{aligned} & ۱۔ \text{ج} ۱ - \text{ج} ۲ ب - \text{ج} ۳ ج + ۲ \text{ج ب} (ج ب ج ج) \\ & = \text{ج ب} \frac{1}{2} (ا + ب + ج) (ج ب \frac{1}{2} (ا + ب + ج) - \text{ج} ۱) + \text{ج} ۳ (ج ب + ج) (ج ب \frac{1}{2} (ا + ب + ج) - \\ & \text{اس کو (۱) سے اخذ کیا جاسکتا ہے، یا واسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔} \\ & ۳۔ ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن تو \\ & \text{ج ب} ۲ + \text{ج ب} ۱ ب + \text{ج ب} ۲ ج = (۱ - ا) \text{ج ب} ۱ ج ب ب ج ج ج \\ & \text{کیونکہ} \end{aligned}$$

$$\text{ج ب} ۱ + \text{ج ب} ۲ ب + \text{ج ب} ۲ ج = ۲ \text{ج ب} ۱ ج ب ۲ + \text{ج ب} (ن - ا) \text{ج ب} (ج ب - ج)$$





۳ (ا + ب + ج - د) - ۲ (ب + ج - د) = (ب + ج - د) (ج + د - ب) (ا + ب - ج) کے جواب میں -

## تین زاویوں کے لئے جمع کے ضابطے

۴۸۔ جمع کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی مدد سے ہم تین زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تغافل کو ان زاویوں کے تغافل کی رقم میں بیان کر سکتے ہیں، چنانچہ

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) + جم ج + جم (ا + ب) جب ج  
= (جم اجم ب + جم اجم ب) + جم ج + (جم اجم ب - جم اجم ب) جب ج  
اور جم (ا + ب + ج)

= جم (ا + ب) + جم ج - جب (ا + ب) جب ج  
= (جم اجم ب - جم اجم ب) + جم ج - (جم اجم ب + جم اجم ب) جب ج  
پس جب (ا + ب + ج)

= جب اجم ب جم ج + جب ب جم ج + جم اجم ب جم ج  
- جب اجم ب جب ج - جب ب جب ج - جم اجم ب جم ج  
اور جم (ا + ب + ج)

= جم اجم ب جم ج - جم اجم ب جب ج - جم ب جب ج جب اجم ب  
- جم ج جب اجم ب ب - جم ج جب اجم ب ب - جم ج جب اجم ب ب

ضابطوں (۲۴) اور (۲۵) کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

جب (ا + ب + ج)  
= جم اجم ب جم ج (مس + مس ب + مس ج - مس ب مس ج)  
اور جم (ا + ب + ج)

= جم اجم ب جم ج (ا-ب) مس ب مس ج - مس ج مس ا - مس ا مس ب  
پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے  
مس (ا + ب + ج)

$$\frac{\text{مس ا + مس ب + مس ج} - \text{مس ا مس ب مس ج}}{\text{مس ا + مس ب + مس ج}}$$

۱- مس ب مس ج - مس ج مس ا - مس ا مس ب  
اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہو سکتا ہے

م (ا + ب + ج)

$$\frac{\text{م ا م ب م ج} - \text{م م ا} - \text{م م ب} - \text{م م ج}}{\text{م م ب م ج} + \text{م م ج} + \text{م م ا} + \text{م م ب} - \text{ا}}$$

(۲۴)

### مثالیں

۱- ثابت کرو کہ مس (۵۴ + ۱) - مس (۴۵ - ۱) = ۲ مس ۲

۲- ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن تو

مس (ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج) =

ا + ب + ج = (۱ + م ۲)  $\frac{۱}{۲}$  تو

اور اگر

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب =

اور ماس اتمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

### زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۴- — یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تغاثلوں کے لئے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں، اور پھر پانچ زاویوں کے حاصل جمع کے لئے، اور علی بنہا۔ استقراء کے طریقہ سے ہم ثابت کریں گے کہ n زاویوں ۱، ۲، ۳، ...، n کے حاصل جمع کی نسبت

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں  
جب  $(\angle + \angle + \dots + \angle) = \angle - \angle - \angle + \angle - \dots$  (۲۸)

جم  $(\angle + \angle + \dots + \angle) = \angle - \angle - \angle + \angle - \dots$  (۲۹)

جہاں  $\angle$  سے  $n$  زاویوں میں سے  $r$  کی جیوب اور باقی  $n - r$  زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور  $n$  زاویوں میں سے  $r$  زاوے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہیں، پس

$\angle = \text{جم } \angle + \text{جم } \angle + \dots + \text{جم } \angle$

$\angle = \text{جب } \angle + \text{جب } \angle + \dots + \text{جب } \angle + \text{جب } \angle + \dots + \text{جم } \angle + \dots$

ضوابط (۲۸) اور (۲۹) صورتوں  $n = 2$ ،  $n = 3$  کے لئے ضابطوں (۱۱) (۲) اور (۲۳) (۲۵) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے  $n$  زاویوں کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ  $(n + 1)$  زاویوں کے لئے بھی درست ہیں، اب

جب  $(\angle + \angle + \dots + \angle + \angle + \angle)$

$= \text{جب } (\angle + \dots + \angle) + \text{جم } (\angle + \dots + \angle) + \text{جب } \angle + \dots$

$= \text{جم } \angle + (\angle - \angle - \angle + \dots) + \text{جب } \angle + (\angle - \angle + \dots) + \dots$

فرض کرو کہ  $\angle$  سے زاویوں  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\dots$ ،  $\angle$  میں سے  $r$  زاویوں

کی جیوب اور باقی  $n + 1 - r$  زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ  $n + 1$  زاویوں میں سے  $r$  زاوے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہوں۔ تب

ج<sub>۱</sub> = ج<sub>۱</sub> جم لن + ج<sub>۱</sub> جب لن +  
کیونکہ ج<sub>۱</sub> جم لن + کی ہر رقم میں زاویوں لن لن ... لن میں سے ایک کی جیب  
ہے اور ج<sub>۱</sub> جب لن + کی ہر رقم میں صرف ج<sub>۱</sub> جب لن + ہے۔

اسی طرح

$$\begin{aligned} \text{ج}_2 &= \text{ج}_2 \text{ جم لن} + \text{ج}_2 \text{ جب لن} + \\ \text{ج}_3 &= \text{ج}_3 \text{ جم لن} + \text{ج}_3 \text{ جب لن} + \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

اس لئے جب (ل<sub>۱</sub> + ل<sub>۲</sub> + ... + لن + ۱) = ج<sub>۱</sub> - ج<sub>۲</sub> + ج<sub>۳</sub> - ...

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم (ل<sub>۱</sub> + ل<sub>۲</sub> + ... + لن + ۱) = ج<sub>۱</sub> - ج<sub>۲</sub> + ج<sub>۳</sub> - ...  
پس اگر ضوابط (۲۸) اور (۲۹) ن زاویوں کے لئے درست ہیں  
تو وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہیں، اور یہ ثابت کیا جا چکا ہے  
کہ وہ ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہیں اس لئے وہ عام طور پر درست  
ہیں۔

ان ضابطوں کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

جب (ل<sub>۱</sub> + ل<sub>۲</sub> + ... + لن) = جم ل<sub>۱</sub> جم ل<sub>۲</sub> ... جم لن (م - ۱ م + م - ۲ م + ...)  
جم (ل<sub>۱</sub> + ل<sub>۲</sub> + ... + لن) = جم ل<sub>۱</sub> جم ل<sub>۲</sub> ... جم لن (۱ - م + م - ۲ م + ...)  
جن میں م سے مس ل<sub>۱</sub>، مس ل<sub>۲</sub> ... مس لن میں سے ۱، ۲، ۳ ... ماسوں کے  
حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اس لئے تقسیم کے عمل سے

$$\text{مس (ل}_1 + \text{ل}_2 + \dots + \text{ل}_n) = \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots - m^2}{1 - m + m^2 - \dots} \quad (30)$$

جون زاویوں کے مجموعہ کے ماس کو ان زاویوں کے ماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

مثال (۳۰) کو بلا واسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\frac{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n+1)}{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n+1)} = \frac{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n+1)}{\text{ماس } (1 + 2 + \dots + n) + \text{ماس } (n+1)}$$

$$\frac{(1 + 2 + \dots + n) + (n+1)}{(1 + 2 + \dots + n) + (n+1)} = \frac{(1 + 2 + \dots + n) + (n+1)}{(1 + 2 + \dots + n) + (n+1)}$$

اب اگر ن + ۱ زاویوں میں سے ر زاویوں کے ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع م سے تعبیر ہو تو

$$\begin{aligned} \text{م} &= \text{ماس } 1 + \text{ماس } 2 + \dots + \text{ماس } n \\ \text{م} &= \text{ماس } 1 + \text{ماس } 2 + \dots + \text{ماس } n \\ \text{م} &= \text{ماس } 1 + \text{ماس } 2 + \dots + \text{ماس } n \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے ماس } (1 + 2 + \dots + n) = \frac{\text{م} - \text{ماس } 1 - \text{ماس } 2 - \dots - \text{ماس } n}{1}$$

اور چونکہ مثال (۳۰) ن = ۲ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا

(50)

۵۔ ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں -  
مثلاً

$$\begin{aligned}
 ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۱ \text{ جب } (۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱) \\
 ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } (۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱) \{ \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ + ۱) \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ + ۱) \\
 ۳ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۳ \text{ جب } (۱ - ۱ + ۱) \text{ جب } ۱ + \dots \\
 &- ۲ \text{ جب } (۱ + ۱ + ۱) \text{ جب } ۱ \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ + ۱ - ۱ - ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ - ۱ + ۱) \\
 &- \text{جب } (۱ + ۱ + ۱ - ۱) + \text{جب } (۱ + ۱ + ۱ + ۱) \\
 &= \text{جب } (۱ + ۱ + ۱ + ۱) - \text{جب } (۱ + ۱ + ۱ - ۱) \\
 &+ \frac{۱}{۲} \text{ جب } (۱ + ۱ - ۱ - ۱)
 \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned}
 ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= \text{جب } (۱ - ۱) + \text{جب } (۱ + ۱) \\
 ۳ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ &= ۳ \text{ جب } (۱ - ۱) \text{ جب } ۱ + \text{جب } (۱ + ۱) \text{ جب } ۱ \\
 &= \text{جب } (۱ - ۱ + ۱ + ۱) + \text{جب } (۱ - ۱ + ۱) \\
 &+ \text{جب } (۱ + ۱ - ۱) + \text{جب } (۱ + ۱ + ۱)
 \end{aligned}$$



$$= \text{جون} + \text{جون} - 1 + \dots + \frac{1}{2}(\text{ن} - 1) \quad (۳۴)$$

ضابطوں (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) کو اوپر  $n = 2, 3, 4$  کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱)  $n$  زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو  $2$  جب  $n$  سے ضرب دو اور کسی رقم  $2$  جون۔ رجب  $n+1$  کی بجائے جیوب کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(۱-)\frac{1}{2} \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \dots \text{ جب } n \text{ جب } n+1$$

کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جون} - \text{جون} + \dots + \frac{1}{2}(\text{ن} - 1) \quad (۳۵)$$

جہاں  $\text{جون}$  وہ حاصل جمع ہے جون  $1 +$  زاویوں میں سے  $n$  زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) جو جاتا ہے جبکہ اس میں  $n$  کو  $n+1$  میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(۱-)\frac{1}{2} \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \dots \text{ جب } n \text{ جب } n+1$$

$$= \text{جون} - \text{جون} + \dots + \frac{1}{2}(\text{ن} - 1) \quad (۳۵)$$

جہاں  $\text{جون}$   $n+2$  زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱) قیمت  $n+2$  کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت  $n$  کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲)  $n+2$  زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطہ  $n = 2, 3, 4$  کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت



میں بھی درست ہیں۔ چوب اتمام کی کسی تعداد کے حامل ضربوں کے ضابطے (۳۳) اور (۳۴) اسی طریقہ سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔  
مثال سے ثابت کرو کہ ن زاویوں ع، ب، ج، ح، د، ... کے لئے

$$3 \text{ جب } (ع \pm ب \pm ج \pm ح \pm د \pm \dots) = 2 \text{ جب } (ع \pm ب \pm ج \pm ح \pm د \pm \dots)$$

3 جب (ع ± ب ± ج ± ح ± د ± ... ) = 4 جب (ع ± ب ± ج ± ح ± د ± ... )  
جہاں 3 سے وہ حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جو علامتوں کی تمام ممکن ترتیبوں کو جو ن-۱ ابہامات کی باعث پیدا ہو سکتی ہیں لینے سے بنتا ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاسلوں کے لئے ضابطہ

۱۵۔ نتیج کے ضابطوں میں جو ہم نے دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں ہر زاویہ کو ا کے مساوی فرض کریں اور حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

$$(35) \text{ جب } 1 = 2 \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \dots \dots \dots$$

$$(36) \text{ جب } 2 = 1 \text{ جب } 1 = 2 \text{ جب } 2 = 1 \dots \dots \dots$$

$$\text{جب } 3 = 1 \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \text{ جب } 1 \dots \dots \dots$$

$$(37) \text{ یا جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \dots \dots \dots$$

$$\text{جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \dots \dots \dots$$

$$(38) \text{ یا جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \text{ جب } 3 = 1 \dots \dots \dots$$

$$(39) \text{ جب } 1 = 2 \text{ جب } 1 = 2 \text{ جب } 1 = 2 \dots \dots \dots$$

$$\text{جب } 1 = 2 \text{ جب } 1 = 2 \text{ جب } 1 = 2 \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \text{ جب } n \text{ جملہ } ۴ \text{ سے } (۴۰) \dots$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰) (۲۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۴م میں ج میں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور ج

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r} \text{ جب } n \text{ جملہ } r$$

ضابطوں (۳۹) (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{جب } n = \text{جملہ } ۱ \text{ } n \text{ مس } ۱ - \frac{n(n-1)(n-2)}{۳} \text{ مس } ۱ + \dots \{$$

$$\text{جملہ } n = \text{جملہ } ۱ \text{ } n \text{ مس } ۱ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{۴} \text{ مس } ۱ + \dots \{$$

(58)

نیز (۹) (۲۶) اور (۳) سے

$$\text{مس } ۱ = \frac{\text{مس } ۲}{۱ - \text{مس } ۱} \dots \dots \dots (۴۱)$$

$$\text{مس } ۲ = \frac{\text{مس } ۳ - \text{مس } ۱}{۳ - ۱} \dots \dots \dots (۴۲)$$

$$\text{مس } n = \frac{n \text{ مس } ۱ - \frac{n(n-1)(n-2)}{۲} \text{ مس } ۱ + \dots}{۱ - \frac{n(n-1)}{۲} \text{ مس } ۱ + \dots} \dots \dots (۴۳)$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضعیف کے دائری تفاعلوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ قوتوں

جب ۱، جب ۲، جب ۳، ....

جم ۱، جم ۲، جم ۳، ....

میں سے ہر ایک قوت متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (۱+۱) = ۱ = ۲ جب ۱ جب ۱ - جب (۱-۱) = ۱

جم (۱+۱) = ۱ = ۲ جم ۱ جم ۱ - جم (۱-۱) = ۱

پس ہر ایک قوت ترکی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ماقبل رقم کو ۲ جم ۱ سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ماقبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے قوتوں کی ارقام کیے بعد دیگرے محسوب کیجا سکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں -

اس لئے سلسلوں

۱+ لاجب ۱، لاجب ۲، ....، اور ۱+ لاجم ۱، لاجم ۲، ۱+ ۲، ....

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱-۲ لاجم ۱ + لاجم ۲

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعیفی زاویوں

کی جوب یا جوب التمام کی رقوم میں حملے

۵۲- کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضعیفوں کی جوب یا جوب التمام کی رقوم میں حملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جب ۱ = ۱ - جم ۲

۴ جب ۱ = ۳ جب ۱ - جب ۳

۸ جب ۱ = جم ۲ - ۴ جم ۲ + ۳



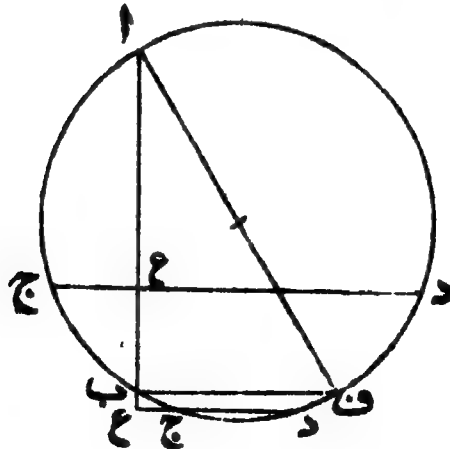


کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہو سکتا ہے۔ مزید برآں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دی جائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ  
 مس<sup>۱</sup> - ۱ - مس<sup>۱</sup> اب = مس<sup>۱</sup> (۱ + ب - ۱ - ۱ - ۱ + ب)  
 میں اگر مس<sup>۱</sup> ۱ اور مس<sup>۱</sup> اب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں  
 یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ  
 $\frac{1}{2}$  سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

مس<sup>۱</sup> (۱ + ب - ۱ - ۱ - ۱ + ب)  
 کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت صفر اور  $\frac{1}{2}$  کے درمیان ایک  
 زادیہ ہے جس کا ماس وہی ہے جو مس<sup>۱</sup> ۱ اور مس<sup>۱</sup> اب کا مجموعہ ہے۔

### ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۴۵۔ اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جاسکتے ہیں،  
 ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دی جائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہئے کہ بالعموم یہ ثبوت  
 زادیوں کی صرف ایک محدود سمت کے لئے درست ہوتے ہیں۔  
 (۱) ضابطہ مس<sup>۱</sup> (۱ + ب) = مس<sup>۱</sup> ۱ + مس<sup>۱</sup> ب ثابت کرو۔









اس لئے  $\frac{اب}{ب ع} = ۳$  جم ۱۔ ۱ = ۳ - ۳ جم ۱؛

پس جب ۳ ل =  $\frac{ب د}{ب ع} = \frac{ب د}{اب} \times \frac{اب}{ب ع} = ۳$  جم ۱۔ ۲ جم ۱؛

اور جم ۳ ل =  $\frac{د ع}{ب ع} = \frac{د ج}{ب ع} \times \frac{ج ع}{ب ج} = \frac{د ج}{ب ع} - \frac{ج ع}{ب ج} - \frac{د ج}{ب ج} - \frac{ج ع}{ب ج}$

= جم ۱ (۳ جم ۱) - ۱ - ۲ جم ۱ = ۳ جم ۱ - ۳ جم ۱

(۱۱) اور (۳) کے ثبوت مشہور ثابث نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چارم میں دئے تھے۔

## مثالیں

ضوابط ذیل کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

(۱) سن ۱ ل =  $\frac{۱ - جم ۱ ل}{۱ + جم ۱ ل}$

(۲) سن (۱ ل + ۱ ل) = سن (۱ ل - ۱ ل) = ۲ سن ۱ ل

(۳) جب ۱ جب ب = جیا ۱ ل (۱ ل + ب) - جیا ۱ ل (۱ ل - ب)

(۴) جیا ۱ ل + جیا ۱ ل = جیا (۱ ل + ب) - جیا (۱ ل - ب) = ۲ جیا ۱ ل جب ب = جم (۱ ل + ب)

(۵) سن ۱ ل - سن ۱ ل =  $\frac{م - ن}{م + ن} = \frac{ن}{م}$

(۶) جم ۱ ل + جم ۱ ل + جم ۱ ل + جم ۱ ل = ۱

جہاں ۱ ل + ب + ج = ۱۸۰

(۷) جب ۱ ل + جب ب - جب ج = ۱ ل جب ۱ ل + جب ب + جب ج = ۱۸۰

جہاں ۱ ل + ب + ج = ۱۸۰

(۸) مم ۱ ل = مم ۱ ل + مم ۱ ل

(۹) جم ۳۶ - جب ۱۰ =  $\frac{1}{7}$

## چوتھے باب پر مثالیں

مثالیں آتا ہا ثابت کرو۔

(۱۸)

- ۱- جم ۱۰ + جم ۱۲۰ = (۱۰ - ۱۲۰) =  $\frac{1}{7}$
- ۲- (جم ۱۰ + جب ۱) + (جم ۱ - جب ۱) = ۲ - ۳ = جم ۱
- ۳- جب ۳ + جب ۱ + جم ۲ = جم ۲ = جم ۲
- ۴- ۲ جم ۱ + جب ۲ = ۲ جم ۱ + جب ۲ = ۲ جب ۲
- ۵- جب ۱ + جب ۱۲۰ = (۱ - ۱۲۰) =  $\frac{1}{7}$  - جب ۳
- ۶-  $\frac{\text{جب ۱} + \text{جب ۲} + \text{جب ۳} + \text{جم ۱} + \text{جم ۲} + \text{جم ۳}}{\text{جم ۱} + \text{جم ۲} + \text{جم ۳} + \text{جم ۴}} = \text{مس ۱}$
- ۷- ۱۱ جم ۱ - جم ۵ = ۵ جم ۱ (۱ + ۲ جم ۱)
- ۸- قم (م + ن) لقم م لقم ن لا - قم (م + ن) لقم م لقم ن لا
- ۹- قم م ۵ + قم ن ۵ - قم (م + ن) ۵
- ۱۰- ۳ جم ۱ (جم ۲ ب - جم ۳ ج)
- ۱۱- ۲ (جم ب - جم ج) (جم ج - جم ۱) (جم ۱ - جم ب) (جم ۱ + جم ب + جم ج)
- ۱۲- ۱ - ۵ جب ۱ (جب ۱ ب + جب ۱ ج) جب (ب - ج)
- ۱۳- جب (ب - ج) جب (ج - ۱) جب (۱ - ب) جب (۱ ب + ۱ ج)
- ۱۴- مس (۱۰ + ۱۰) مس (۱۰ - ۱۰) + مس (۱۰ + ۱۰) + مس (۱۰ - ۱۰) مس ۱
- ۱۵- ۳ =
- ۱۶- مم (۱۰ + ۱۰) مم (۱۰ - ۱۰) + مم (۱۰ + ۱۰) + مم (۱۰ - ۱۰) مم ۱
- ۱۷- ۳ =

-۱۳

$$\frac{\text{جم } ۱۸}{\text{جم } ۶} - \frac{\text{جم } ۹}{\text{جم } ۳} + \frac{\text{جم } ۶}{\text{جم } ۲} - \frac{\text{جم } ۳}{\text{جم } ۱}$$

$$= (\text{جم } ۲ - \text{جم } ۳ + \text{جم } ۶ - \text{جم } ۱۲)$$

-۱۴

$$= \frac{\text{جب (ب + ج + د - ز)}}{\text{جب (ز - د) (ب - ز) (ج - ز)}}$$

-۱۵

$$\frac{\text{جم } ۲}{\text{جم } ۲} + \frac{\text{جب (ب - ز) (ج - ز)}}{\text{جب (ب - ز) (ج - ز) (ب - ز) (ج - ز)}}$$

$$+ \frac{\text{جم } ۲}{\text{جب (ب - ز) (ج - ز) (ب - ز) (ج - ز)}} = \text{جم } ۲ + \text{جب (ب + ج)}$$

اگر (ب + ج = ۲) و روابط از مثال ۱۶ تا ۲۷ ثابت کرد -

-۱۶

$$\text{س } ۱ \text{ م } ۲ \text{ ب } ۳ \text{ ج } ۴ = \text{س } ۲ \text{ م } ۳ \text{ ب } ۴ \text{ ج } ۵$$

-۱۷

$$\text{س } ۱ \text{ م } ۲ = \text{م } ۱ \text{ م } ۲ \text{ ب } ۳ \text{ ج } ۴ + \text{ق } ۱ \text{ ق } ۲ \text{ ب } ۳ \text{ ج } ۴$$

-۱۸

$$\text{س } ۱ \text{ ب } ۲ \text{ (ج - ز) = - جب (ب - ز) (ج - ز) (ب - ز) (ج - ز)}$$

-۱۹

$$\text{س } ۱ \text{ (جب + ب + ج) (جم + ج) (جم + ز) (جم + ب)}$$

$$= \text{جب (ب + ج) (ج - ز) (ب - ز) (ج - ز)}$$

-۲۰

$$\text{س } ۱ \text{ جب (ب - ز) (ج - ز)}$$

$$= \text{س } ۱ \text{ جب (ب - ز) (ج - ز) + جب (ب - ز) (ج - ز)}$$

-۲۱

$$\text{س } ۱ \text{ جب (ب - ز) (ج - ز) = س } ۱ \text{ (جب + ب + ج) (جم + ج) (جم + ز) (جم + ب)}$$

$$\times \text{جم } ۲ \text{ + جم } ۳ \text{ + جم } ۴ \text{ + جم } ۵$$

-۲۲

$$\text{س } ۱ \text{ (س - ب - م - ج)}$$

(59)

$$= - \text{س } ۱ \text{ (ب - ز) (ج - ز) (ب - ز) (ج - ز)}$$

- ۲۳-  $3 \text{ جم } 1 (\text{جب } 2 \text{ ب} + \text{جب } 2 \text{ ج}) = 2 \text{ جب } 2 \text{ ب جب ج}$
- ۲۴-  $3 \text{ جم } 2 (\text{جب } 1 \text{ ج} + \frac{1}{2}) = 3 \text{ جب } 1 \text{ ج} + \frac{1}{2} \{ 3 \text{ جم } 2 \}$
- ۲۵-  $(\text{ب} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج}) - (\text{ج} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ج} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ب})$
- $+ (\text{ج} + \text{ج}) \times (\text{ج} + \text{ب} - \text{ب} - \text{ج}) = \text{ج} + \text{ج} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ج}$
- ۲۶- 
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
- ۲۷-  $3 \text{ ق م ب ق م ج ق م ج ق م ج} - (\text{ج} - \text{ب})$
- $= \text{ق م ج} - (\text{ج} - \text{ج}) \text{ ق م ج} - (\text{ج} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{ب}) (\text{ج} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج})$
- ۲۸- اگر  $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} = \frac{1}{2} \pi$  تو ثابت کرو کہ
- $\text{ب} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ع} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ع} = 1$
- ۲۹- ثابت کرو کہ
- ۳۰- 
$$\frac{1}{2 \text{ جم } 1 - 1} = \frac{1}{2 \text{ جم } 1 + 1} + \frac{1}{2 \text{ جم } 1 + 1} + \frac{1}{2 \text{ جم } 1 - 1}$$
- ثابت کرو کہ
- ۳۱- اگر  $\text{س} = \frac{\text{ن جب ع جم ع}}{\text{ن جب ع} - 1}$  تو ثابت کرو کہ
- $\text{س} (\text{ع} - \text{س}) = (\text{س} - 1) (\text{ن} - \text{س})$
- ۳۲- اگر  $\text{س} = \frac{\text{ج ب ع جب ط}}{\text{جم ط} - \text{جم ع}}$  تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ۱} = \frac{\text{جیب د جیب ذ}}{\text{جیب ذ} \pm \text{جیب د}}$$

۳۳- اگر  $\angle \alpha$  جیب  $\angle =$  جیب  $\beta +$  جیب  $\gamma$  ،  $\angle \alpha$  جیب  $\angle =$  جیب  $\beta -$  جیب  $\gamma$

تو ثابت کرد که  $\pm$  جیب  $\angle =$  جیب  $\beta = \frac{1}{2}$

۳۴- ثابت کرد که

$$\frac{\text{جیب ۲ ط} + \text{جیب ۲ ذ}}{\text{جیب ۲ ط} - \text{جیب ۲ ذ}} = \frac{\text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ذ}}{\text{جیب ۲ ج} - \text{جیب ۲ ذ}} = \frac{\text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ذ}}{\text{جیب ۲ ج} - \text{جیب ۲ ذ}}$$

۳۵- اگر ط اور ذ مساوات

جیب ط + جیب ذ =  $\angle \alpha$  (جیب ذ - جیب ط)

کو پورا کریں تو جیب ط + جیب ۲ ذ =

۳۶- ثابت کرد که مس ۲۰ = مس ۲۰ + ۲۰ مس ۲۰ + ۲۰ مس ۲۰

۳۷- اگر  $\frac{\text{جیب ۲ ج}}{\text{جیب ۲ ج}} + \frac{\text{جیب ۲ ج}}{\text{جیب ۲ ج}} = 1$  تو

$$1 = \frac{\text{جیب ۲ ج}}{\text{جیب ۲ ج}} + \frac{\text{جیب ۲ ج}}{\text{جیب ۲ ج}}$$

۳۸- اگر جیب  $\angle =$  جیب  $\beta +$  جیب  $\gamma =$  جیب  $\beta -$  جیب  $\gamma$  (جیب  $\gamma -$  جیب  $\beta$ )

تو  $\text{جیب ۲ ج} = \text{جیب ۲ ج} = \text{جیب ۲ ج}$

۳۹- اگر  $\text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ج} = \frac{1}{2}$  تو

(جیب ط + جیب د) (جیب ج + جیب د) (جیب ج + جیب د) = ۲ (جیب ج + جیب د)

+ جیب ط + جیب د

۴۰- اگر  $\angle \alpha = \gamma$  ،  $\angle \alpha$  جیب  $\angle =$  جیب  $\beta +$  جیب  $\gamma$

تو  $\text{جیب ۲ ج} = \text{جیب ۲ ج} = \frac{1}{2}$

۴۱- اگر  $\text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ج} + \text{جیب ۲ ج} = \frac{1}{2}$





۵۸۔ اگر  $۲ = ۵ + ۲ + ۲$  تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} \left( \frac{۲ \text{ جم} + ۲ \text{ جم} + ۲ \text{ جم}}{۱} \right) = \text{مس} [۲ \text{ مس} (۵ - ۲) + ۲ \text{ مس} (۲ - ۲) + ۲ \text{ مس} (۲ - ۲)]$$

= مس ۱

۵۹۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس} \left[ \frac{۱ (۱ + ۲ + ۳)}{۱} \right] + \text{مس} \left[ \frac{۲ (۲ + ۳ + ۴)}{۲} \right] + \text{مس} \left[ \frac{۳ (۳ + ۴ + ۵)}{۳} \right] = ۱۰$$

ثابت کرو کہ مساوات

جب  $۱ = ۱$  جب  $۲ = ۱ + ۱$  جب  $۳ = ۱ + ۱ + ۱$  (جہاں  $n$  صحیح عدد ہے)  
کا پیری مثال حسب ذیل ہے

$$\{ ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) \}$$

$$= \{ ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) - ۱ \text{ مس} (۱) \}$$

جہاں  $۲ = ۱ + ۱ + ۱$

مثال ۶۱ تا ۶۷ کی مساواتیں حل کرو۔

۶۱۔ جب  $۲ = ۱ + ۱$  جب  $۳ = ۱ + ۱ + ۱$

۶۲۔ جب  $۳ = ۱ + ۱ + ۱$  جب  $۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$

۶۳۔ جب  $۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$  جب  $۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$

۶۴۔ مس  $۲ = ۱ + ۱$  مس  $۳ = ۱ + ۱ + ۱$  مس  $۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$

۶۵۔ مس  $۳ = ۱ + ۱ + ۱$  مس  $۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$  مس  $۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$

۶۶۔  $۲$  جب  $(۲ - ۱) = ۱$  جب  $(۳ - ۱) = ۲$  جب  $(۴ - ۱) = ۳$

۶۷۔  $۲$  جب  $(۲ - ۱) = ۱$  جب  $(۳ - ۱) = ۲$  جب  $(۴ - ۱) = ۳$



(62)

۶۸۔ جب م ط + جب ن ط + جب (م + ن) ط =

۶۹۔ جب  $\frac{ن}{۲}$  ط + جب  $\frac{۱-ن}{۲}$  ط = جم ط

۷۰۔ مس ط + قط ۲ ط = ۱

۷۱۔ ۲ (جب ط + جم ط) = ۱

۷۲۔ مس ط + مس ۳ ط + مس ۵ ط =

۷۳۔ مم ۱ لا - مم ۱ (لا + ۲) = ۱۵

۷۴۔ ۱ جب ۱ لا + ب جم ۱ لا = ع

۱ جم ۱ لا - ب جب ۱ لا = ۲

۷۵۔ قم ۲ ع - قم ۲ ط = مم ۲ ع - مم ۲ ط

۷۶۔ تقاطعون (۱) جب ۱ لا + جب ۲ لا

(ب) جم ۲ لا جم لا

کی ترتیبات کیجئے۔

۷۷۔ مساوات (۱) جب ط - جم ع = ب (جب ع - جم ط) کے سب حل دریافت کرو۔

۷۸۔ اگر م صحیح عدد ہو اور ل + ب + ج = ۱۱ تو ثابت کرو کہ

جب ۲ م ل + جب ۲ م ب + جب ۲ م ج = (۱-۱) ۴ ۱ جم ۱ م ب جب م ج

جم ۲ م ل + جم ۲ م ب + جم ۲ م ج = (۱-۱) ۴ ۱ جم ۱ م ب جب م ج - ۱

۷۹۔ ثابت کرو کہ لا + ۸ لای + ۲ ی = ۲ لا ۱

جہاں لا = جب ل + جب ب + جب ج ، لا = جب ب جب ج + جب ج جب ل

+ جب ل جب ب ، ی = جب ا جب ب جب ج

۸۰۔ اگر  $\frac{۱-مس ب مس ج}{جم ل} + \frac{۱-مس ج مس ل}{جم ب} = \frac{۱-مس ل مس ب}{جم ج}$

تو ثابت کرد کہ یا د مس' د' مس ب' مس ج' سلسلہ خنایہ میں ہیں یا  
 ا + ب = ج، ۱۲ کا ایک صحیح عددی ضلع ہے۔

۸۱۔ اگر جم ل = جم ط جب ف، جم با = جم ف جب پ، جم ج = جم پ جب ط

اور ل + با + ج = ۱۲ تو ثابت کرد کہ مس ط مس د مس پ = ۱

۸۲۔ ان ساداتوں کو حل کرو۔

$$۴ (جم ۳ ط + جم ۴ ط) (جم ۳ ط + جم ۴ ط) = ۱$$

$$۴ (جم ۳ ط + جم ۵ ط) (جم ۶ ط + جم ۷ ط) = ۱$$

پانچواں باب  
تحت صنفی زاویوں کے دائری تفاعل  
ضوابط

۵۵۔ اگر ہم گزشتہ باب کے مضامین (۳۴) میں دکی بجائے پے م لکھیں تو

حرف - جزم  $\frac{1}{2}$  حرف - جب  $\frac{1}{4}$  حرف =  $2 \times \frac{1}{2} = 1$  حرف - ا =  $1 - 1 = 0$  جب  $\frac{1}{4}$  حرف

اس لئے  $1$  - جم  $2$  = جب  $2$   $\frac{1}{2}$   $2$  ،  $1$  + جم  $2$  = جب  $2$   $\frac{1}{2}$   $2$  ،  
 جذر المربع لینے سے جم  $2$   $\frac{1}{2}$   $2$  اور جب  $2$   $\frac{1}{2}$   $2$  کے لئے جم  $2$  کی رقوم میں  
 حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

جب  $\frac{1}{p} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (1 - \text{جمعد})}$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \text{مجموعه})}} \sqrt{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\text{مجموعه}}}$$

ان میں سے پہلے مضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کرو

$$\frac{\sqrt{J_{\text{جم}} - 1}}{J_{\text{جم}} + 1} \sqrt{z} = \frac{1}{4} \text{ ماس}$$

ان تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر وہ دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب  $\frac{1}{2}$  ع، جم  $\frac{1}{2}$  ع، مس  $\frac{1}{2}$  ع میں سے ہر ایک کی ایک یگا قیمت ہے، اور اس لئے ان کے لئے جو چلے حاصل ہو گئے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالاتین جلوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ ان سے جب  $\frac{1}{2}$  ع، جم  $\frac{1}{2}$  ع، مس  $\frac{1}{2}$  ع کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم ع کی قیمت دی گئی ہو، نہ کہ جب ع دیا گیا ہو۔ اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۳۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن ۲ ع میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو ع کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو۔ اس لئے وہ ضابطے جو جب  $\frac{1}{2}$  ع، جم  $\frac{1}{2}$  ع، مس  $\frac{1}{2}$  ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے نہ صرف خود جب  $\frac{1}{2}$  ع، جم  $\frac{1}{2}$  ع، مس  $\frac{1}{2}$  ع کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطہ  $\frac{1}{2}$  (۲ ن ۲ ع) میں شریک تمام زاویوں کے ان تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(84) جب  $\frac{1}{2}$  (۲ ن ۲ ع) کی جو قیمتیں ہو سکتی ہیں ان کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہیئے، ایک وہ صورت جبکہ ن جنت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

$$\text{جب } \frac{1}{2} (۲ م ۲ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{2} ع) = \pm \text{جب } \frac{1}{2} ع$$

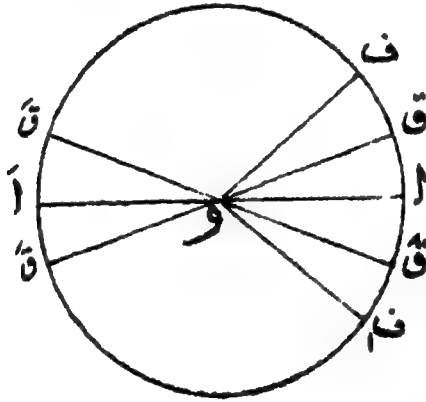
لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

$$\text{جب } \frac{1}{2} (۲ م ۲ + ۱ ع) = \text{جب } (\pm \frac{1}{2} ع) = \pm \text{جب } \frac{1}{2} ع$$

پس جب  $\frac{1}{2}$  ع اور - جب  $\frac{1}{2}$  ع کی قیمتیں اس ضابطہ سے حاصل ہوتی ہیں جو جب  $\frac{1}{2}$  ع کو جم ع کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح دیکھایا جاسکتا ہے کہ جم  $\frac{1}{2}$  (۲ ن ۱۱ ± ع) اور مس  $\frac{1}{2}$  (۲ ن ۱۱ ± ع) کی قیمتیں ± جم  $\frac{1}{2}$  ع، ± مس  $\frac{1}{2}$  ع ہیں، اور اس طرح ان مضابطوں سے جو جم  $\frac{1}{2}$  ع اور مس  $\frac{1}{2}$  ع کو جم و کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم  $\frac{1}{2}$  ع - جم  $\frac{1}{2}$  ع اور مس  $\frac{1}{2}$  ع - مس  $\frac{1}{2}$  ع کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس متذکرہ صدرتین مضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶۔ مصلہ بالا تین مضابطوں میں علامت کا جواہام ہے اُس کی ہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔



اگر اوف = ع اور اوف = ع تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جٹ (وا، وف)، (وا، وف) ہی وہ جٹ ہیں جن میں سے ہر زاویے کی جیب اتمام وہی ہے جو ع کی ہے، اگر زاویوں اوف، اوف کے ناصف علی الترتیب ق و ق، ق و ق ہوں تو زاویوں (وا، وف) کا ناصف وقی یا وق ہے، اس لئے جب  $\frac{1}{2}$  ع، جم  $\frac{1}{2}$  ع، مس  $\frac{1}{2}$  ع کے مضابطوں سے جبکہ جم ع دیا گیا ہو ان تمام ہم اختتامی

زاویوں کی جیب، جیبِ اتمامِ ماس مائل ہوتے ہیں جو چار جٹوں (وا، وق) (وا، وق) (وا، وق) (وا، وق) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کی جیب، جب پ اء کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیب، - جب پ اء کے مساوی ہیں؛ پہلے اور تیسرے جٹوں کے زاویوں کی جیبِ اتمام، جم پ اء کے مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جٹوں کی جیبِ اتمام، - جم پ اء کے مساوی؛ پہلے اور دوسرے جٹوں کے زاویوں کے ماس، مس پ اء کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جٹوں کے زاویوں کے ماس، - مس پ اء کے مساوی۔

۵۷۔ اب ہم دفعہ ۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات دور کریں گے۔ تفاعل جب  $\frac{1}{2}$  مثبت یا منفی رہے ہو جب اس کے کہ  $\frac{1}{2}$  اور  $2n$  اور  $(n+1)$  کے درمیان یا  $(n+1)$  اور  $n(n+2)$  کے درمیان واقع ہو، یعنی ہو جب اس کے کہ  $\frac{1}{2}$  اور  $2n$  اور  $n+1$  کے درمیان واقع ہو۔

اس لئے ہمیں ضابطہ

جب  $\frac{1}{p} = (1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{p}}$  (1) .. ..

حاصل ہوتا ہے جس میں ف ایسا خبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر  $\frac{1}{2}$  سے عین چھوٹا ہے۔

۲۴ کے مین چھوٹا ہے۔  
 ۲۴ قائل جم  $\frac{1}{2}$  مثبت یا منفی ہے بوجب اس کے کہ  $\frac{1}{2}$  عدد  
 ۲۴  $n - \frac{1}{2}$  اور  $n + \frac{1}{2}$  کے درمیان یا  $n + \frac{1}{2}$  اور  $n$

اور ۲ ن ۲ + ۲ ۳ کے درمیان واقع ہو یعنی بوجہ اس کے کہ  $\frac{1}{p} (n + m) \sqrt{1 - \frac{1}{p}}$   
 ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو؛ اسلئے

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ م} = (1 - \frac{1}{p}) \sqrt{\frac{1}{p} (1 + \text{جم م})} \dots\dots\dots (۲)$$

جس میں قی وہ صحیح عدد ہے جو  $\frac{1}{p} (1 + \text{جم م})$  سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔  
 اسی طرح

$$\text{مس } \frac{1}{p} \text{ م} = (1 - \frac{1}{p}) \sqrt{\frac{1}{p} (1 + \text{جم م})} \dots\dots\dots (۳)$$

جس میں م دوف - قی ہمیشہ یا تو صفر ہے یا  $\pm ۱$ ۔

۵۸۔ اگر جم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۵) میں اکی بجائے  $\frac{1}{p}$  م  
 لکھیں تو

$$\begin{aligned} \text{جب م} = ۲ \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ م} \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ م} \\ \text{اس لئے} \quad \text{مس } \frac{1}{p} \text{ م} = \frac{\text{جب } \frac{1}{p} \text{ م}}{\text{جم } \frac{1}{p} \text{ م}} = \frac{\text{جب } \frac{1}{p} \text{ م}}{\text{جم } \frac{1}{p} \text{ م}} = \frac{\text{جب } \frac{1}{p} \text{ م}}{\text{جم } \frac{1}{p} \text{ م}} \\ \text{اس طرح ہیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں:} \end{aligned}$$

$$\text{مس } \frac{1}{p} \text{ م} = \frac{\text{جب م}}{1 + \text{جم م}} = \frac{1 - \text{جم م}}{\text{جب م}} \dots\dots\dots (۴)$$

جن سے مس  $\frac{1}{p}$  م بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔ ان ضابطوں سے  
 مس  $\frac{1}{p}$  م حاصل ہو گا جبکہ جب م اور جم م دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ  
 ۲ ن + ۲ م میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام  
 وہی ہیں جو م کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس  $\frac{1}{p}$  م  
 کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جب م اور جم م کی قوم میں بیان ہوئے ہیں  
 زاویوں ۲ ن + ۲ م میں سے سب زاویوں کے ماس حاصل ہوتے ہیں؛ اور

(66) یہ تمام زاوئے ایک ہی ماس مس  $\frac{1}{2}$  دے رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹۔ اب ہم جب  $\frac{1}{2}$  دے کی رقوم میں جب  $\frac{1}{2}$  دے، جم  $\frac{1}{2}$  دے، مس  $\frac{1}{2}$  دے کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$+ \text{ جب } \frac{1}{2} = +1 + \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے} = (\text{جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے})$$

$$\text{نیز } - \text{ جب } \frac{1}{2} = -1 - \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے} = (\text{جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے})$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے} = \pm \sqrt{+1 + \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}}$$

$$\text{جب } \frac{1}{2} \text{ دے جم } \frac{1}{2} \text{ دے} = \pm \sqrt{-1 - \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}}$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \frac{1}{2} \text{ دے} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{+1 + \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}} \pm \sqrt{-1 - \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}} \}$$

$$\text{جم } \frac{1}{2} \text{ دے} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{+1 + \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}} \mp \sqrt{-1 - \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ دے}} \}$$

مُبہم علامتوں میں سے ہر علامت لیجا سکتی ہے، اس لئے جب  $\frac{1}{2}$  دے کی رقوم میں جب  $\frac{1}{2}$  دے کی چار قینیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب  $\frac{1}{2}$  دے اور جم  $\frac{1}{2}$  دے کو جب  $\frac{1}{2}$  دے کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب ان تمام زاویوں کی جیب اور جیب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابط  $\frac{1}{2} (ن + (-1) \text{ دے})$  میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۳۳) میں بتا دیا ہے ان زاویوں کی جیب جو  $\frac{1}{2} (ن + (-1) \text{ دے})$  میں شامل ہیں جب  $\frac{1}{2}$  دے کے مساوی ہیں۔ زاویوں  $\frac{1}{2} (ن + (-1) \text{ دے})$  کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر  $ن = ۴$  م تو

$$\frac{1}{2} (ن + (-1) \text{ دے}) = ۲ م + \frac{1}{2} \text{ دے}$$



ان زاویوں کی جیب اور جیب اتمام علی الترتیب جب  $\frac{1}{p}$  عہ اور جم  $\frac{1}{p}$  عہ ہے  
(۲) اگر  $n = m + 1$  تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi = (1 - \frac{1}{p}) m + \pi = \frac{1}{p} - \pi$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب اتمام علی الترتیب جم  $\frac{1}{p}$  عہ اور جب  $\frac{1}{p}$  عہ ہے۔  
(۳) اگر  $n = m + 2$  تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi = (1 - \frac{1}{p}) m + \pi = \frac{1}{p} + \pi$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب اتمام علی الترتیب - جب  $\frac{1}{p}$  عہ اور - جم  $\frac{1}{p}$  عہ ہے۔  
(۴) اگر  $n = m + 3$  تو

$$\frac{1}{p} (n) + \pi = (1 - \frac{1}{p}) m + \pi = \frac{1}{p} - \pi$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب اتمام علی الترتیب - جم  $\frac{1}{p}$  عہ اور - جب  $\frac{1}{p}$  عہ کے مساوی ہے۔

اس طرح جب  $\frac{1}{p}$  عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں جب  $\frac{1}{p}$  عہ جم  $\frac{1}{p}$  عہ،  
- جب  $\frac{1}{p}$  عہ، - جم  $\frac{1}{p}$  عہ حاصل ہوتی ہیں اور جم  $\frac{1}{p}$  عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں  
جم  $\frac{1}{p}$  عہ، جب  $\frac{1}{p}$  عہ، - جم  $\frac{1}{p}$  عہ، - جب  $\frac{1}{p}$  عہ -

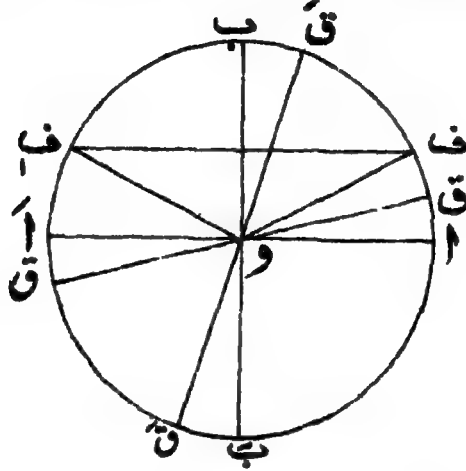
لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جٹ جو مساواتوں

$$\begin{cases} (لا + ما) = 1 + \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ (لا - ما) = 1 - \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases}$$

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

$$\begin{cases} لا = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases} \quad \begin{cases} لا = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases} \quad \begin{cases} لا = \text{جم } \frac{1}{p} \text{ عہ} \\ ما = \text{جب } \frac{1}{p} \text{ عہ} \end{cases}$$

۴۰۔ گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے اہامات کی ہندی توضیح  
 حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف = وا = و، خ = وا = و۔ تو وہ



زاوئے جن کی جیب وہی ہے جو وہ کی ہے ہم اختتامی زاویوں (وا، و ف) کے  
 (وا، و ف) کے دو جیب ہیں، پس اگر زاویوں ا د ف، ا و ف کے  
 ناصف ق و ق، ق و ق ہوں تو ہم اختتامی زاویوں (وا، و ق)  
 (وا، و ق)، (وا، و ق)، (وا، و ق) کے چار جیب وہ زاوئے ہو گئے  
 جن کی جیب اور جیب تمام ان ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب پے  
 جم پے کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب و دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ق و ب  
 = پے و اور ق و ا = پے (۲۲۔ و)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان  
 چار جیبوں کی جیب جب پے و، جب پے و، جب پے و، جب پے و ہیں  
 اور ان کی جیب تمام جم پے و، جم پے و، جب پے و، جب پے و  
 ہیں۔ جب پے و، جم پے و کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو  
 ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{17} \left( \frac{1}{p} \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p} \text{ ع} \right) \\ = \overline{17} \text{ جب } \left( \frac{1}{p} \text{ ع} + \frac{1}{p} \right)$$

(68) اور اسی طرح

جب  $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{17} \text{ جب } \left( \frac{1}{p} \text{ ع} - \frac{1}{p} \right)$   
 اس لئے جب  $\frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$  مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ  $\frac{1}{p}$  +  
 $\frac{1}{p}$ ،  $2$  اور  $2$  +  $1$  کے درمیان واقع ہے یا  $2$  +  $1$  اور  
 $2$  +  $2$  کے درمیان۔

اور جب  $\frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع}$  مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے  
 کہ  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p}$ ،  $2$  اور  $2$  +  $1$  کے درمیان واقع ہے یا  $2$  +  $1$  اور  
 $2$  +  $2$  کے درمیان۔  
 اس لئے

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} + \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{(1-)}^f \overline{17} \text{ جب ع} ،$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} - \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \overline{(1-)}^q \overline{17} \text{ جب ع} ،$$

جہاں  $f$  مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p}$  سے  
 عین چھوٹا ہے اور  $q$  وہ صحیح عدد ہے جو جبری طور پر  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p}$  سے  
 عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

$$\text{جب } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \{ \overline{(1-)}^f \overline{17} \text{ جب ع} + \overline{(1-)}^q \overline{17} \text{ جب ع} \} \quad (5)$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} \text{ ع} = \frac{1}{p} \{ \overline{(1-)}^f \overline{17} \text{ جب ع} - \overline{(1-)}^q \overline{17} \text{ جب ع} \} \quad (6)$$

$$\text{مس } \frac{1}{p} = \frac{(1-) \sqrt{1+1} \text{ جب } \frac{1}{p} + (1-) \sqrt{1-1} \text{ جب } \frac{1}{p}}{(1-) \sqrt{1+1} \text{ جب } \frac{1}{p} - (1-) \sqrt{1-1} \text{ جب } \frac{1}{p}} \quad (4)$$

۶۲۔ جب  $\frac{1}{p} =$  جم  $\frac{1}{p}$ ، مس  $\frac{1}{p}$  کو مس  $\frac{1}{p}$  کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = (1-) \text{ جم } \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p} = (1-) \sqrt{1+1} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = (1+) \sqrt{1+1} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = (1-) \sqrt{1+1} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

$$\text{جم } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = (1+) \sqrt{1+1} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

$$\text{اور اس لئے مس } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ابہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہو سکتی ہے۔

یہ تو جہ طلب ہے کہ مس  $\frac{1}{p}$  کی قیمتیں، مس  $\frac{1}{p}$  کی دو درجی مساوات

$$\text{مس } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

(69)

کی مہلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۱) میں ۱ کی بجائے  $\frac{1}{p}$  رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

۴۳۔ تفاعل جب  $\frac{1}{2}$  جم  $\frac{1}{2}$  مس  $\frac{1}{2}$  بغیر ابہام کے مس  $\frac{1}{2}$  کی رقوم میں بیاں کئے جاسکتے ہیں؛ کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا مس وہی ہے جو  $\frac{1}{2}$  کا ہے ضابطہ  $n + \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  مس شامل ہیں، اور  $2(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  یا  $2n + 2$   $\frac{1}{2}$  وہ زاویے ہیں جن کے تمام دائری تفاعل وہی ہیں جو  $\frac{1}{2}$  کے ہیں۔ پس

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \frac{2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2}}$$

$$\text{جم } \frac{1}{2} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2} - \text{جب } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2} + \text{جب } \frac{1}{2} \text{ مس } \frac{1}{2}}$$

$$\text{اس لئے نیز } \text{مس } \frac{1}{2} = \frac{2 \text{ مس } \frac{1}{2}}{1 - \text{مس } \frac{1}{2}}$$

### مثالیں

- (۱)۔ اگر  $2$  جم  $\frac{1}{2}$  =  $1$  جب  $\frac{1}{2}$  -  $1$  جب  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  ثابت کر دے کہ ط کو  $\frac{1}{2}$  (  $n + 5$  )  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  (  $n + 4$  )  $\frac{1}{2}$  کے درمیان واقع ہونا چاہئے جن میں  $n$  ایک صحیح عدد ہے۔
- (۲)۔ ثابت کر دے کہ

$$\text{نظا} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2}}{1 + \text{جب } \frac{1}{2}} + \frac{\text{جب } \frac{1}{2}}{1 - \text{جب } \frac{1}{2}}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ

$$2(n - \frac{1}{2}) \text{ اور } 2(n + \frac{1}{2})$$

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

(۳)۔ ثابت کرو کہ  $\frac{\sqrt{1 - \text{جب لا}} + 1}{\sqrt{1 + \text{جب لا}} - 1}$  کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:

(۴)۔ اگر جب م = ۱ تو ثابت کرو کہ مس ۱ کی چار قیمتیں جہ

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۵)۔ ضابطہ مس ۱ = ۱۔  $\frac{\sqrt{1 + \text{مس}} - 1}{\text{مس}}$  میں ثابت کرو کہ مشتبہ علامت

کی بجائے (۱) رکھنے سے ابہام دور کیا جاسکتا ہے جہاں م،  $\frac{90}{18}$  سے عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

## دئے ہوئے زاوئے کے ایک ثلث کے دائری تفاعل

(70)

۴۴۔ اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے ۱۷ درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

جب ع = ۳ جب ۱۷ ع = ۴ جب ۱۷ ع، . . . (۸)

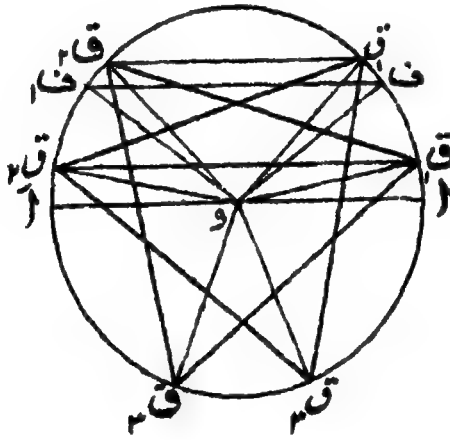
جم ع = ۴ جم ۱۷ ع = ۳ جم ۱۷ ع، . . . (۹)

مس ع = ۳ مس ۱۷ ع = ۳ مس ۱۷ ع، . . . (۱۰)

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کبھی مساوات ملتی ہے جس سے ۱۷ کے دائری تفاعل کو ع کے دائری تفاعل کی قوم میں معلوم

کیا جاسکتا ہے۔ پس اگر جب  $\angle$  دیا گیا ہے تو جب  $\frac{1}{2}$   $\angle$  کی عین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، اگر  $\angle$  دیا گیا ہے تو  $\frac{1}{2}$   $\angle$  کی تین قیمتیں الگ الگ حاصل ہوتی ہیں اور اگر  $\angle$  دیا گیا ہے تو  $\frac{1}{2}$   $\angle$  کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) ضابطہ (۸) کی صورت میں جب  $\angle$  دیا گیا ہے اور جب  $\frac{1}{2}$   $\angle$  کے لئے زاویوں (و، ا، و ف)، (و، ا، و ف) میں سے سب کے ایک مثلث کی جوب کی قیمتیں حاصل ہونگی، کیونکہ زاویہ (و، ا، و ف) اور (و، ا، و ف) کی جیب وہی ہے جو  $\angle$  کی ہے۔ فرض کرو کہ زاویوں (و، ا، و ف) کی تثلیث



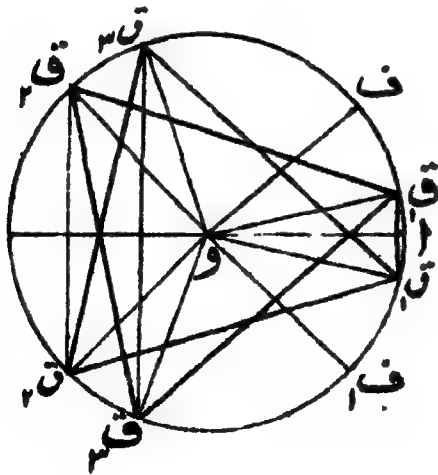
کرنے والے خطوط  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$  ہیں اور اس طرح زاویہ  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$  =  $\frac{1}{2}$   $\angle$  اور  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$  = ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور

$$\angle، \angle = \frac{2}{3} \angle + \frac{1}{3} \angle، \angle = \frac{1}{3} \angle + \frac{2}{3} \angle$$

اسی طرح زاویوں (و، ا، و ف) کی تثلیث کرنے والے خطوط  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$  ہیں اور اس طرح  $\angle$ ،  $\angle$ ،  $\angle$  = ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے

اور  $ق = وا = \frac{1}{2} (ا - م)$  اور  $ق = وا = \frac{1}{2} (ا - م)$  اور  $ق = وا = \frac{1}{2} (ا - م)$   
ہم فوراً یہ دیکھتے ہیں کہ  $ق = ق$ ،  $ق = ق$ ،  $ق = ق$  متوازی ہیں  
وا کے ہم اختتامی زاویوں  $(وا، وق)$ ،  $(وا، وق)$  کے درجوں کی  
جیوب، جب  $\frac{1}{2} م$  ہیں؛ جنوں  $(وا، وق)$ ،  $(وا، وق)$  کی جیوب،  
جب  $(\frac{1}{2} م + \frac{1}{2} م)$  ہیں؛ اور  $(وا، وق)$ ،  $(وا، وق)$  کی جیوب،  
جب  $(\frac{1}{2} م + \frac{1}{2} م)$  ہیں۔ اسلئے جب  $\frac{1}{2} م$  میں جو کبھی سادات  $(ا)$  ہے اسکی  
تین اصلیں حسب ذیل ہیں:

جب  $\frac{1}{2} م$  جب  $(\frac{1}{2} م - \frac{1}{2} م)$  اور جب  $(\frac{1}{2} م + \frac{1}{2} م)$   
(۲) مضابط (۹) کی صورت میں وہ زاویے جن کی جیب التمام وہی  
ہے جو  $م$  کی ہے  $(وا، وف)$  اور  $(وا، وف)$  ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں  
کے پہلے جٹ کی تثلث کرنے والے خطوط  $وق$ ،  $وق$ ،  $وق$  میں جہاں



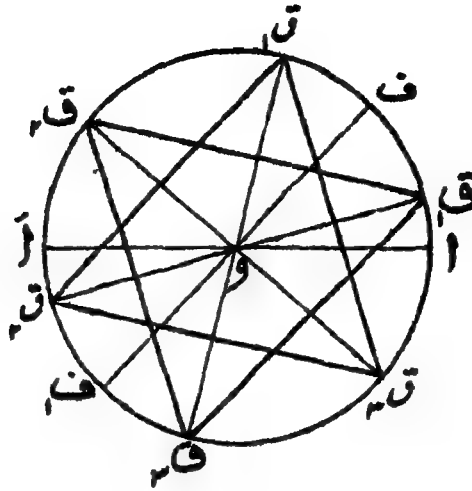
$ق = وا = \frac{1}{2} م$  اور  
 $ق = ق$  متساوی الاضلاع  
مثلث ہے، دوسرے جٹ  
کی تثلث کرنے والے خطوط  
 $وق$ ،  $وق$ ،  $وق$  میں جہاں  
 $ق = وا = \frac{1}{2} م$  اور  
 $ق = ق$  متساوی الاضلاع  
مثلث ہے۔ ہم فوراً دیکھتے  
ہیں کہ  $ق = ق$ ،  $ق = ق$ ،



ق ق ق عمود ہیں واپر۔ زاویوں (وا، وق) (وا، وق) کے دو جٹوں  
کی جیوب التمام جم  $\frac{1}{2}$  عہ ہیں، دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام  
جم  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں، اور دو جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کی جیوب التمام  
جم  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں۔ اس لئے جم  $\frac{1}{2}$  عہ میں جو کبھی مساوات (۹) ہے  
اس کی تین اصلیں جم  $\frac{1}{2}$  عہ جم  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})$  عہ اور  
جم  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاوئے جن کا ماس وہی ہے  
جو عہ کا ہے (وا، وف) اور (وا، وف) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱  
میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق، وق، وق  
ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے وق، وق، وق ہیں جہاں  
ق ق ق ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق وا =  $\frac{1}{2}$  (۳ + عہ)۔  
ہم دیکھتے ہیں کہ ق، وق، ق، وق، وق، اور ق ق وق دائرے کے  
قطر ہیں۔ جٹوں (وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس  $\frac{1}{2}$  عہ ہیں؛  
(وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں، اور  
(وا، وق) (وا، وق) کے ماس مس  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں۔  
اس لئے مس  $\frac{1}{2}$  عہ کی کبھی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس  $\frac{1}{2}$  عہ،  
مس  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})$  عہ مس  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$  عہ ہیں۔

اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں:- لایں کبھی  
مساوات ۳ لا - ۳ لا = جب عہ  
کی اصلیں حسب ذیل ہیں:



جب  $\frac{1}{2}$  ع، جب  $\frac{1}{2}$  (ع - ۲۲) - جب  $\frac{1}{2}$  (ع + ۲۲) ؛  
کبھی مساوات

$$۳ لا - ۳ لا = جم ع$$

کی اصلیں ہیں  
جم  $\frac{1}{2}$  ع، - جم  $\frac{1}{2}$  (ع - ۲۲) - جم  $\frac{1}{2}$  (ع + ۲۲)  
اور کبھی مساوات

$$مس ع (۳ لا - ۱ لا) = ۳ لا - لا$$

کی اصلیں ہیں  
مس  $\frac{1}{2}$  ع، - مس  $\frac{1}{2}$  (ع - ۲۲) - مس  $\frac{1}{2}$  (ع + ۲۲)

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین

۵۔ اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعلوں کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جاسکتے ہیں جو ان زاویوں کے کسری یا تحت منطقی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں۔

$$(۱۱) چونکہ جب  $\frac{1}{2}$  ع = جم  $\frac{1}{2}$  ع = ۲۲ =  $\frac{1}{۲۷}$$$

اس لئے دفعہ ۵ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{8} = \pi \frac{1}{8} = \pi \frac{1}{8} \sqrt{2} - \pi \frac{1}{8} \sqrt{2} \text{، جم } \frac{1}{8} = \pi \frac{1}{8} \sqrt{2} + \pi \frac{1}{8} \sqrt{2} \text{،}$$

$$\text{جب } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} \sqrt{2} - \pi \frac{1}{14} \sqrt{2} \text{، جم } \frac{1}{14} = \pi \frac{1}{14} \sqrt{2} + \pi \frac{1}{14} \sqrt{2} \text{،}$$

اور اسی طرح غل کو جاری رکھنے سے ہم جب  $\pi \frac{1}{4}$  اور جم  $\pi \frac{1}{4}$  کو محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۲) \text{ چونکہ جب } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{4} \text{، جم } \frac{1}{4} = \pi \frac{1}{4} \sqrt{2} \text{،}$$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

$$\text{جب } \frac{1}{11} = \pi \frac{1}{11} = \pi \frac{1}{11} \sqrt{2} - \pi \frac{1}{11} \sqrt{2} \text{، جم } \frac{1}{11} = \pi \frac{1}{11} \sqrt{2} + \pi \frac{1}{11} \sqrt{2} \text{،}$$

یہ قیمتیں جب ۱۵، جم ۱۵ کے لئے دفعہ ۳۴ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس غل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زائوں  $\frac{\pi}{2}$  کی جوب اور جوب اتمام محسوب کر سکتے ہیں۔

$$(۳) \text{ — چونکہ جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

(۷۸)

$$\text{اور جب } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، جم } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

اس لئے جب  $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \sqrt{2} - \pi \frac{1}{5} \sqrt{2}$ ، جم  $\frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \sqrt{2} + \pi \frac{1}{5} \sqrt{2}$ ،

$$\text{اب چونکہ جب } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \text{، جم } \frac{2}{5} = \pi \frac{2}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

$$\text{اس لئے جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

$$\text{یا جب } \frac{3}{5} = \pi \frac{3}{5} \text{، جب } \frac{3}{5} = \pi \frac{3}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

$$\text{یعنی جم } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \text{، جب } \frac{1}{5} = \pi \frac{1}{5} \sqrt{2} \text{،}$$

نیز  $(\text{جم } \frac{1}{2} \pi + \text{جب } \frac{1}{2} \pi) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  ؟

اس لیے  $\text{جم } \frac{1}{2} \pi + \text{جب } \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2}$

یا  $\text{جب } \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  ،  $\frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  (ماہ ۱ + ۱)

اور اس لیے  $\text{جم } \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  ،  $\frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  ، جب  $\frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  ،  
یہ قیمتیں دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔

یہ امر توجہ طلب ہے کہ اگر عہ کوئی زاویہ ہو جس کی جیب اور جیب التمام معلوم ہے اور ان قیمتیں صحیح عدد ہوں تو شکل مچھنے کے تمام زاویوں کی جیب اور جیب التمام ایسی شکل میں معلوم کی جاسکتی ہیں جس میں صرف جذروں کے نکالنے کا عمل شامل ہوتا ہے، کیونکہ ہم نے یہ دکھا دیا ہے کہ شکل مچھنے کے تمام زاویوں کے دائری تفاعل کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اور جب یہ معلوم ہو جائیں تو گزشتہ باب کے ضابطوں کی مدد سے جب مچھنے اور جم مچھنے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

۶۶۔ اب ہم ۳ سے شروع کر کے ۹۰ تک ان تمام زاویوں کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جن کا فرق ۳ یا  $\frac{\pi}{6}$  ہے۔ چنانچہ

جب ۳ = جب (۱۸ - ۱۵)

= جب ۱۸ جم ۱۵ - جب ۱۸ جب ۱۵

=  $\frac{1}{14} (18 + 15) - \frac{1}{14} (18 - 15) = \frac{1}{14} (33) = \frac{33}{14}$

اسی طرح جم ۳ =  $\frac{1}{14} (18 + 15) + \frac{1}{14} (18 - 15) = \frac{1}{14} (33 + 3) = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$  نیز چونکہ

۹۰ - ۳۶ = ۵۴ ، ۳۶ - ۲۵ = ۱۱ ، ۲۵ - ۱۲ = ۱۳

$\pi = 21 - 24 = 24, 21 - 24 = 24, 21 - 24 = 24$   
 $\pi = 23 - 24 = 24, 24 - 24 = 24, 24 - 24 = 24$   
 اس لیے ہم زاویوں ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ کی جیب التمام محسوب کر سکتے  
 ہیں۔ اس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ ۱۳ سے بڑے کسی زاویے  
 کی جیب یا جیب التمام اس کے متمم کی جیب التمام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے  
 اور یہ متمم زاویہ ۱۳ سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل  
 میں دی گئی ہے۔

### جیب

(74)

$\pi \frac{1}{4} = 21$	$\left\{ \overline{a} + a (1 - \sqrt{3})^2 - (1 - \overline{a}) (\sqrt{3} + \overline{a}) \right\} \frac{1}{14}$
$\pi \frac{1}{8} = 24$	$(1 - \overline{a} - \overline{a} \sqrt{3} - \sqrt{3} \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{1}{6} = 24$	$(\overline{a} - \overline{a}^2 - \sqrt{3} + \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{1}{3} = 24$	$(\sqrt{3} + \overline{a} - \overline{a}^2 + \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{1}{12} = 24$	$(\sqrt{3} - \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{1}{10} = 24$	$(1 - \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{6}{11} = 21$	$\left\{ (1 + \overline{a}) (\sqrt{3} - \overline{a}) - \overline{a} - \overline{a} (1 + \sqrt{3})^2 \right\} \frac{1}{14}$
$\pi \frac{1}{13} = 24$	$(\overline{a}^2 - 1 - \sqrt{3} + \overline{a}) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{2}{7} = 24$	$(\sqrt{3} + \overline{a} - \overline{a} + \overline{a}^2) \frac{1}{8}$
$\pi \frac{1}{9} = 24$	$\frac{1}{8}$
$\pi \frac{11}{14} = 24$	$\left\{ \overline{a} + a (1 - \sqrt{3})^2 + (1 - \overline{a}) (\sqrt{3} + \overline{a}) \right\} \frac{1}{14}$

$\frac{1}{\sqrt{2-1.0.}} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{1}{2} = 90^\circ$
$\left\{ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-3.2)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1.2)} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{13}{4} = 99^\circ$
$\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{2} 4+3.2)}{1} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{6}{4} = 92^\circ$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{1}{4} = 95^\circ$
$\frac{(\sqrt{2}-1.2+\sqrt{2} 2+1.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{9}{4} = 98^\circ$
$\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1.2)+\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+3.2) 2}{14} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{16}{4} = 91^\circ$
$\frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{7}{4} = 94^\circ$
$\frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1.2)-\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+3.2) 2}{14} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{19}{4} = 96^\circ$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{1}{4} = 90^\circ$
$\frac{(\sqrt{2}-1.2+\sqrt{2} 2+1.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{6}{4} = 93^\circ$
$\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{2} 4-3.2)}{1} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{11}{4} = 94^\circ$
$\left\{ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-3.2) 2+(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1.2)}{14} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{13}{4} = 99^\circ$
$\frac{\sqrt{2} 2+1.2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{5}{4} = 92^\circ$
$\frac{(\sqrt{2}+1.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{8}{4} = 95^\circ$
$\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{2} 4+3.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{13}{4} = 98^\circ$
$\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2} 2+\sqrt{2} 2+1.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{19}{4} = 91^\circ$
$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2} 2-1.2+1.2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{6}{4} = 94^\circ$
$\left\{ \frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1.2)+\sqrt{2}+\sqrt{2}(1+3.2) 2}{14} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{19}{4} = 96^\circ$
$\frac{1}{1} \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi \frac{1}{4} = 90^\circ$

(75)

اس جدول میں زاویوں 90, 99, 92, 95, 98, 91, 94, 96, 99, 92, 95, 98, 91, 94, 96 کی نیچ دی گئی ہیں۔

اور تمام زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں۔ اوپر کے  
جملوں میں جو اعداد مجذور ہیں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات  
تک مسطرہ پر لکریں گے۔ (نہ سینجوراف میتھیٹکس جلد ششم) میں دی ہیں۔ ان  
کی جدولوں میں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک  
دی گئی ہیں۔ مکمل جدول جس میں ان زاویوں کے حماس  
قاطع، قاطع التمام، منطبق نسب، ناوا الی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن  
(Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں ملے گی۔

### پانچویں باب پر مثالیں

مثلاً اتناہ کے رشتے ثابت کرو جن میں  $۱ + ب + ج = ۱۸۰$

$$(۱) \quad \frac{\text{مس } \frac{۱}{۲} + ۱ - \text{جم } ۱ + \text{جم } ب + \text{جم } ج}{\text{مس } \frac{۱}{۲} + ۱ - \text{جم } ج + \text{جم } ۱ + \text{جم } ب} = ۱$$

$$(۲) \quad \text{جب } (۱ - ب) \text{ جب } (۱ - ج) + \text{جب } (ب - ج) \text{ جب } (ب - ۱) + \text{جب } (ج - ۱)$$

$$\times \text{جب } (ج - ب) = ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + (ب - ج) \text{ جم } \frac{۱}{۲} + (ج - ۱) \times \text{جم } \frac{۱}{۲} + (ب - ۱)$$

$$- ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جب } \frac{۱}{۲} + ۱$$

$$(۳) \quad \text{جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱$$

$$+ ۲ \text{ جم } ب \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } ج \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱$$

$$= ۸ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱$$

$$(۴) \quad \text{ح } جب ۱ = ۳ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۱$$

$$(۵) \quad \text{ح } قم ۱ (۱ + ب + ج)$$

$$= \text{قم } ۱ \text{ قم } ب \text{ قم } ج \text{ قم } ۱ (ب - ج) \text{ قم } ۱ (ج - ۱) \text{ قم } ۱ (۱ - ب) \text{ قم } ۱ (ب - ۱) \text{ قم } ۱ (۱ - ۱)$$





(۱۳) اگر  $ا + ب + ج + د = ۳۶۰$  تو ثابت کرو کہ

جم  $\frac{۱}{۲}$  ا جم  $\frac{۱}{۲}$  د جب  $\frac{۱}{۲}$  ب جب  $\frac{۱}{۲}$  ج - جم  $\frac{۱}{۲}$  ب جم  $\frac{۱}{۲}$  ج جب  $\frac{۱}{۲}$  ا جب  $\frac{۱}{۲}$  د

= جب  $\frac{۱}{۲}$  (ا + ب) جب  $\frac{۱}{۲}$  (ا + ج) جم  $\frac{۱}{۲}$  (ا + د) (۱۴) ثابت کرو کہ

جب  $\frac{۱}{۲}$  (ب + ج) + جب  $\frac{۱}{۲}$  (ج - ا) جب  $\frac{۱}{۲}$  (ا - ب)

+ جم  $\frac{۱}{۲}$  (ب + ج) جم  $\frac{۱}{۲}$  (ج - ا) جم  $\frac{۱}{۲}$  (ا - ب) = ۲ (۱۵) ثابت کرو کہ

جب (ا - ی) + جب (ی - لا) + جب (لا - ا)

+ جم (ا - ی) + جم (ی - لا) + جم (لا - ا)

= مس  $\frac{۱}{۲}$  (ا - ی) مس  $\frac{۱}{۲}$  (ی - لا) مس  $\frac{۱}{۲}$  (لا - ا) (۱۶) دریافت کرو کہ یہ ہے جس کی رشتہ ہونا چاہئے کہ

جم  $\frac{۱}{۲}$  + جم  $\frac{۱}{۲}$  + جم  $\frac{۱}{۲}$  = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ جب  $\frac{۱}{۲}$  + جب  $\frac{۱}{۲}$  + جب  $\frac{۱}{۲}$

(۱۷) اگر  $ا + ب + ج + د = ۳۶۰$  تو ثابت کرو کہ

جم (ب + ج + د) + جم (ج + د + ا) + جم (د + ا + ب) + جم (ا + ب + ج)

= ۴ جم  $\frac{۱}{۲}$  (ا + ب) جم  $\frac{۱}{۲}$  (ا + ج) جم  $\frac{۱}{۲}$  (ا + د)

(۱۸) اگر مس  $\frac{۱}{۲}$  ط = مس  $\frac{۱}{۲}$  فہ اور مس فہ = ۲ مس عہ تو ثابت کرو کہ ط + فہ = ۲ عہ

(۱۹) اگر جب  $\frac{۱}{۲}$  عہ = جب س جب (س - ط) جب (س - فہ) جب (س - پ)

تو ثابت کرو کہ ۴ جم  $\frac{۱}{۲}$  ط جم  $\frac{۱}{۲}$  فہ جم  $\frac{۱}{۲}$  پ

مس  $\frac{۱}{۲}$  عہ = مس  $\frac{۱}{۲}$  س مس  $\frac{۱}{۲}$  (س - ط) مس  $\frac{۱}{۲}$  (س - فہ) مس  $\frac{۱}{۲}$  (س - پ)

جہاں  $۲س = ط + ف + پ$   
 (۲۰) اگر  $۱ + ب + ج + د = ۱۸۰$  تو ثابت کرو کہ  
 جب  $۱ + جب + ب + جب - جب د$

$۲ = جم + (۱ + د) جم + (ب + د) جم + (ج + د) جم$   
 (۲۱) اگر  $۲ = ۲ + ۲ = ۲$  تو ثابت کرو کہ

جب  $۲ = (۱ + ۲ جم) + (ب + ۲ جم) + (ج + ۲ جم) + (د + ۲ جم)$   
 $۲ = جب + (۲ - ب) جب + (۲ - ج) جب + (۲ - د) جب$   
 (۲۲) اگر  $۲س = ۱ + ب + ج$  تو ثابت کرو کہ

$جم + ۱س جم + (س - ۱) جم + (س - ب) جم + (س - ج) جم$   
 $+ جب + ۱س جب + (س - ۱) جب + (س - ب) جب + (س - ج) جب$   
 $= جم + ۱ جم + ب جم + ج جم$   
 (۲۳) اگر  $۲ = ۲ + ۲ = ۲$  تو

$(۱س + ۱س) (۱س - ۱س) (۱س - ۱س) = جب + جب + جب - ۱$   
 $(۱س + ۱س) (۱س - ۱س) (۱س - ۱س) = جم + جم + جم - ۱$   
 (۲۴) اگر  $۲ = ۲ + ۲ = ۲$  تو ثابت کرو کہ

$جم (۳ + ۲ - ۲) + جم (۳ + ۲ - ۲) + جم (۳ + ۲ - ۲)$   
 $= جم + ۲ (۲ - ۲) + ۲ (۲ - ۲) + ۲ (۲ - ۲)$   
 (۲۵) اگر  $۲ط = ۲ جم + ۲ ط = ۲ جم + ۲ ط$   
 اور  $مس ط پس ط = مس ط پس ط$   
 تو ثابت کرو کہ  $مس ط پس ط = ۲ = ۲ مس ط$



اور یہ معلوم کرو۔

(۳۳) اگر  $e + b + c = \pi$  تو ثابت کرو کہ

مس (ا)  $\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$

$$= \sin \frac{a}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \right\}$$

(۳۴) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

کا حاصل جمع ان کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

(۳۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} + \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}$$

(۳۶) اگر

$$\frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$$

تو ثابت کرو کہ ہر کسر  
 $\text{جم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + بہ)}$   
 کے مساوی ہے اور نیز  
 $\{ \text{مس} - \text{مس} \frac{1}{4} (\text{بہ} + \text{جہ}) \} \setminus \{ \text{مس} + \text{مس} \frac{1}{4} (\text{بہ} + \text{جہ}) \}$   
 کے مساوی ہے۔

---

# بجھٹا باب

## مختلف مسئلے

(78)

۶۷۔ اس باب میں ہم اُن جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ ان میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے اُن طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ ان جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔ تاہم اُن طریقوں کا احتیاط سے مطالعہ کرنے سے جو ہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کئے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

## متشکلات اور استحالات

### مثالیں

- ۶۸

(۱) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۲ \text{ جب } (ب - ج) + \text{جب } ۲ \text{ جب } (ج - ع) + \text{جب } ۲ \text{ جب } (ع - ح) \\ = \{ \text{جب } (ب + ج) + \text{جب } (ج + ع) + \text{جب } (ع + ح) \} \times$$

{جب (جہ - ب) + جب (بہ - ع) + جب (عہ - ج)}  
اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو  
مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب ہہ جم جہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ  
+ جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے  
ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم جہ + جب عہ جم جہ) - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ)  
کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب جہ جم بہ = جم جہ جب بہ = جب جہ - جب بہ  
اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے؛ باقی رقمیں

= ۲ جب عہ جم جہ (جب بہ جم جہ - جم بہ جب جہ) + ۲ جب بہ جم جہ (جب جہ جم جہ - جم جہ جب جہ)  
+ ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم جہ - جم عہ جب جہ)

= جب عہ جب (بہ - ج) + جب بہ جب (جہ - ع) + جب جہ جب (عہ - بہ)؛  
اس طرح متماثلہ

ج جب عہ جب (بہ - ج) = ج جب (بہ + ج) ج جب (جہ - ع)؛  
ثابت ہو چکی۔

(۲۱) پچھلی مثال میں عہ، بہ، ج کی بجائے علی الترتیب  $\frac{1}{11}$ ،  $\frac{1}{11}$ ،  $\frac{1}{11}$  + بہ  
 $\frac{1}{11}$  + ج رکھو تو متماثلہ ذیل حاصل ہوگی :-

ج۔ جم عہ جب (بہ - ج) = ج۔ جم (بہ + ج) ج جب (جہ - ع)؛  
(۳) ثابت کرو کہ

ج جب عہ جب (بہ - ج) = ج جب (بہ + ج) جب (جہ - ع) جب (عہ - بہ)؛  
اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب  
کی مقداروں جب عہ، جب بہ، ج کی بجائے ان کے مماثل ضلعی زاویوں کی  
جیب کی رقوم میں جو جملے ہیں ان کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

(۲۹)

ہو جاتا ہے

$$\frac{۲}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (۲-۲) - \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } ۳ \text{ جب } (۲-۲)$$

$$یا - \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } ۳ \text{ جب } (۲-۲) \text{ بموجب مثال (۳) دفعہ ۲۵}$$

اب ہم جیوب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیوب التمام کے فرق رکھتے ہیں

تو جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{۱}{۳} \text{ (جیم } ۳ + ۲ - ۲) - \text{جیم } (۳ - ۲ + ۲) + \text{جیم } (۲ + ۲ - ۲) - \text{جیم } (۲ + ۲ - ۲)$$

$$- \text{جیم } (۳ - ۲ + ۲) + \text{جیم } (۳ - ۲ + ۲) - \text{جیم } (۳ - ۲ + ۲) + \text{جیم } (۳ - ۲ + ۲)$$

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

$$۲ \text{ جب } ۲ \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ + ۲ + ۲)$$

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ

لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$- \frac{۱}{۳} \text{ جب } (۲ + ۲ + ۲) \text{ جب } ۲ \text{ جب } (۲ - ۲)$$

$$یا - \text{جب } (۲ + ۲ + ۲) \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲)$$

بموجب مثال (۳) دفعہ ۲۴

(۴) ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{۳} \text{ جیم } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲) = \text{جیم } (۲ + ۲ + ۲) \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲)$$

(۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{۳} \text{ جب } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲) = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲) \text{ جب } (۲ - ۲)$$

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقعہ سے مستنبط ہو گا کہ  $۳ = ۳ + ۳ + ۳$  لا لا ی کا ایک جزو

ضروری لا + لا + ی ہے

$$\text{رکھو لا} = \text{جب } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲) = ۳ = \text{جب } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲) = ی = \text{جب } ۳ \text{ جب } (۲ - ۲)$$



تو لا + ما + ی = ۰

(۶) ثابت کرو کہ

جب (ع + ہ) جب (ع - ہ) جب (ج + ض) جب (ج - ض) + جب (ہ + ج) جب (ہ - ج)  
ہ جب (ع + ض) جب (ع - ض) + جب (ج + ع) جب (ج - ع) جب (ہ + ض) جب (ہ - ض) = ۰

جملہ (لا - ما) (ی - و) + (ما - ی) (لا - و) + (ی - لا) (ا - و)

مثلاً صفر ہوتا ہے۔ پس رکھو لا = جب ع، ا = جب ہ، ی = جب ج، و = جب ض  
تو چونکہ

جب ع - جب ہ = جب (ع + ہ) جب (ع - ہ)

اس لیے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ

۱ (جم ہ جم ج - جم ع) (جم ج جم ع - جم ہ) (جم ع جم ہ - جم ج) +

جب ع جب ہ جب ج - جب ع (جم ہ جم ج - جم ع) جب ہ (جم ج جم ع - جم ہ)

- جب ہ (جم ع جم ہ - جم ج) = ۱ - (جم ع - جم ہ - جم ج + جم ع جم ہ جم ج)

یہ مسئلہ اخذ ہوتا ہے اس مشہور مسئلہ سے کہ متعلق

گ	ب	ا
ف	ب	ا
ج	ف	گ

ب ج - ف	ف گ - ج	ف - ب
ف گ - ج	ج ا - گ	گ - ا
ف - ب	گ - ا	ا ب - ج

رکھو ۱ = ب = ج = ا، ف = جم ع، گ = جم ہ، ج = جم ج، و = جم ض  
ب ج - ف = جب ع - جب ہ، وغیرہ



اور  $\frac{1}{2}$  جم ۲ جب (ب-ج) جم (ج-د) جم (د-ه) =  $\frac{1}{2}$  جم ۲ جب ۲ (ب-ج) جب  
 - جب ۲ (ج-د) - جب ۲ (د-ه) (ب-ج) {  
 $\frac{1}{2}$  جم ۲ جب ۲ (ب-ج) -  $\frac{1}{2}$  جم ۲ جب ۲ (ج-د) -  $\frac{1}{2}$  جم ۲ جب ۲ (د-ه) =  
 = جب ۲ (ب-ج) جب (ج-د) جب (د-ه) (ب-ج) جم ۲  
 پس مذکورہ بالا شمار کنندہ

= جب ۲ (ب-ج) جب (ج-د) جب (د-ه) (ب-ج) جم ۲ (ب-ج) + جم ۲ (ج-د) + جم ۲ (د-ه) ؟  
 اسلئے یہ جملہ =  $\frac{1}{2}$  جم ۲ (ب-ج) + جم ۲ (ج-د) + جم ۲ (د-ه)  
 اگر (۹)

د + ب + ج =  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  (ب-ج-د) (د-ه) (ب-ج) (ج-د) (د-ه) (ب-ج) =  
 تو ثابت کر دو کہ  $\frac{1}{2}$  جم ۲ + جم ۲ + جم ۲ =  
 دی بروئی مساوات کا مربع لینے سے

جب ۲ (ب-ج) -  $\frac{1}{2}$  (ج-د) جب ۲ (ج-د) -  $\frac{1}{2}$  (د-ه) جب ۲ (د-ه) -  $\frac{1}{2}$  (ب-ج) =  
 = جم ۲ (ب-ج) -  $\frac{1}{2}$  (ج-د) جم ۲ (ج-د) -  $\frac{1}{2}$  (د-ه) جم ۲ (د-ه) -  $\frac{1}{2}$  (ب-ج)

(۱- جب ۲) (۱- جب ۲) (۱- جب ۲) = (۱+ جب ۲) (۱+ جب ۲) (۱+ جب ۲)  
 پس (81) جب ۲ + جب ۲ + جب ۲ + جب ۲ = ۰

یا  $\frac{1}{2}$  جم ۲ +  $\frac{1}{2}$  جم ۲ +  $\frac{1}{2}$  جم ۲ + جب ۲ = ۰

اس لیے ۱ + جب ۲ + جب ۲ + جب ۲ = ۰

نیز جم ۲ + جم ۲ + جم ۲ - ۱ = ۲ جب ۲ + جب ۲ + جب ۲

اس لیے

$$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

[illegible]

توضیحات کروک: جب ۱ء + جب ۲ء + جب ۳ء = جم ۴ء جم ۵ء جم ۶ء جم ۷ء

اب  $\frac{1}{p} (b-a+c) \frac{1}{p} (c-b+a) \frac{1}{p} (a-b+c)$

$$(2-1+3) \cdot \frac{1}{4} 2^2, (1-2+3) \cdot \frac{1}{4} 2^2, (3-2+1) \cdot \frac{1}{4} 2^2 =$$

$$! \{ (ج - ب - ع) - (ج - ب) \} \div \{ (ج - ب + ع) - (ج - ب) \} = \{ (ج - ب) + (ج - ب - ع) \} \div \{ (ج - ب + ع) - (ج - ب) \}$$

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\bullet = (\pi \frac{1}{p} + q - r + s) \frac{1}{p} \text{ جم } + (\pi \frac{1}{p} + q - r + s) \frac{1}{p} \text{ جم } (s - r)$$

اور جب ۲ عدد + جب ۲ ہر + جب ۲ چہ - ۴ جم عدہ جم بہ جم جہ۔

$$= ۲ \text{ جب } (۲+۴) \text{ جم } (۲-۴) - ۲ \text{ جم } ۲ + \{ \text{جم } (۴-۲) + \text{جم } (۴+۲) - \text{جب } ۲ \}$$

$$= {}^2\text{م}(-\text{ع}) \left[ \text{جب}(\text{ع}+\text{ز}) - \text{جب}\left(\pi - \frac{1}{7}\right) \right] - {}^2\text{م}(\text{ج}) \left[ \text{جب}(\text{ع}+\text{ز}) - \text{جب}\left(\pi - \frac{1}{7}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{7} (\pi - \frac{1}{7} + \frac{2}{7} - \frac{3}{7} + \frac{4}{7})^2 \cdot (\pi - \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{4}{7})^2 =$$

$$\{ (\pi + \frac{1}{2} + j - i + m) \frac{1}{2} - j - i - m \}$$

اور یہ صفر کے مساوی ہے۔

(۱۱) اگر یہ ویاتگیا ہو کہ

۴. جم (۱-۵). جم (۵-۱۱). جم (۱۱-۱۷) = ۱

تواہت کردہ

1+ ۱۲ جم. ۲ (۶-۵). ۲ جم. (۵-۱). ۲ جم. (۱-۱). ۲ (۱-۱)

۴ = ۳ (۱-۵) ، ۳ (۱-۷) ، ۳ (۱-۱۱)

فرض کرد که  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$

$$6 = 2 + 2 + 2$$

٢٠

[illegible]



رکھو لا = ک. جم ط' = ما = ک. جم فہ' ی = ک. جم پہ' تب

جم' فہ' + جم' پہ' = ۲. جم فہ. جم پہ. جم عہ = ۱ - جم' عہ'

(جم عہ - جم فہ. جم پہ) = جب' فہ جب' پہ

یا اس لیے جم عہ = جم (فہ ± پہ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم بہ = جم (بہ ± طہ) جم جہ = جم (طہ ± فہ) اس لیے عمومیّت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں عہ = فہ ± پہ بہ = پہ ± طہ جہ = طہ ± فہ - اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں ہمیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت۔ پہلی صورت میں طہ = کس - عہ، فہ = س - بہ، پہ = س - جہ؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} ط = س - بہ \\ ف = س - جہ \\ پہ = س \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = جہ - س \\ ف = س \\ پہ = س - بہ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ط = س - بہ \\ ف = عہ - س \\ پہ = س \end{array} \right.$$

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پروری ہوتی ہے۔

## مساواتوں کا حل

۶۹ — مثالیں

(۱) حل کرو مساوات

جب ۲ ط ۲ ط ۲ ط + جم ۲ ط = جم ۶ ط  
یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

جب ۲ ط ۲ ط ۲ ط + جم ۲ ط - جم ۶ ط = ۰

جب ۲ ط ۲ ط ۲ ط + ۲ جب ۲ ط جب ۲ ط = ۰

جب ۲ ط = ۰ یا ۲ ط ۲ ط + ۲ جب ۲ ط = ۰

جب ۸ ط = ۱ -

یا  
پس  
یعنی

اس لیے حل ہیں

$$\left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right\} = \frac{1}{r} = \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$$

(۲) حل کرو مساوات

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

اس مساوات کی طرفین جب  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$  سے تقسیم پذیر ہیں، اس لیے اس جزو ضربی کو نکال دینے سے

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

جس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

پھر مشترک جزو ضربی جب  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$  کو خارج کر دینے سے

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

لے یہ مثال واسٹن ہوم کے مسئلوں سے لی گئی ہے۔

اس لیے جب (لا + م) = - جب م جم م

اس لیے حل ہیں

$$لا = ۲ن + م + م اور لا = ن - م + (۱ - لا) جب ۱ (جب م جم م)$$

(۳) حل کرو مساواتیں

$$\begin{cases} \text{وجب (لا + م) - ب جب (لا - م) = ۲م جم لا} \\ \text{وجب (لا + م) + ب جب (لا - م) = ۲ن جم م} \end{cases}$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۲} \{ \text{وجب (لا + م) + ب جب (لا - م) } \} - \frac{۱}{۲} \{ \text{وجب (لا + م) - ب جب (لا - م) } \} \\ = ۲م - ۲ن \end{aligned}$$

$$\text{فرض کرو جب (لا + م) = ت تو ت حسب ذیل دو درجی مساوات سے}$$

لیگا

$$\begin{aligned} \text{و ت}^۲ \left( \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) + \text{ت} \{ \text{وب (لا + م) } \} - \text{ت}^۲ \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \\ + \text{ب}^۲ \left( \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = ۰ \end{aligned}$$

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

$$\text{ت} = \frac{\text{جب (لا + م)}}{\text{جب (لا - م)}} = \frac{\text{م لا + م لا}}{\text{م لا - م لا}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{م لا}}{\text{م لا}} = \frac{\text{ت} + ۱}{\text{ت} - ۱}$$

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{م جم لا}}{\text{ن جم م}} = \frac{\text{وت - ب}}{\text{وت + ب}}$$



اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ قطا میں  $1 = 1$  کے ذریعہ ماکو ساقط کرنے سے

$$\frac{ن^۲}{م^۲} \left( \frac{وت - ب}{وت + ب} \right)^۲ قطا لا - \left( \frac{ت - ۱}{ت + ۱} \right)^۲ مس^۲ لا = ۱$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مس لا = \pm \left\{ ۱ - \frac{ن^۲}{م^۲} \left( \frac{وت - ب}{وت + ب} \right)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}} \left\{ \frac{ن^۲}{م^۲} \left( \frac{وت - ب}{وت + ب} \right)^۲ \right\}^{\frac{۱}{۲}} - \left( \frac{ت - ۱}{ت + ۱} \right)^۲$$

اس سے مس لاکي چار قیمتیں ملتی ہیں جن میں سے دو، دو اُس دو زوجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے۔ اس طرح لا معلوم ہو چکا اور پھر م اس مساوات

$$مس م = \frac{ت - ۱}{ت + ۱} مس لا$$

سے لہجاتا ہے۔

استقاط

(84)

۷۔ مثالیں۔

(۱) مساواتوں  $\frac{جم ط}{جم (ع ط)} = \frac{جب ط}{جب (ع ط)} = م$  سے ط ساقط کرو۔

ہونکہ  $م = \frac{جب ط جم ط + جب ط جم ط}{جب (ع ط)} = \frac{جب ط جم ط}{جب (ع ط)}$

اس لیے  $\frac{۱}{م} = جب ع جم ط - جم ع$

نیز  $م = \frac{جم ط جم ط - جب ط جب ط}{جم (ع ط) - جب ط جب (ع ط)} = \frac{جم ط}{جم (ع ط)}$

$= \frac{جم ع + جب ع مس ۲}{جم ط}$

پس  $\left(\frac{1}{7}م + جم\right) (جم - \frac{1}{7}م) = جب^۲$

یا  $۲م^۲ - ۱ = م \cdot جم$   
اور یہ مطلوبہ حاصل استقامت ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\frac{جم۳}{جم} = \frac{جم۳(ط-ط) = جم۳(ط+ط-ط-ط)}{جم(ط-ط) = جم(ط+ط-ط-ط)}$$

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ ہر سے آزاد ہے۔  
مساوات

$$\frac{جم۳}{جم} = \frac{جم۳(لا-ط)}{جم(لا-ط)}$$

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تاج قیمتیں ط، جب، ط اور صفر ہیں۔ اسلئے  
جم ۳ لا جم ۳ ط + جب ۳ لا جب ۳ ط = ک (جم لا جم + جب لا جب + ط لا ط)  
جہاں ک = جم ۳ ط، جم ۳ جب، جم ۳ لا کی بجائے ان کی قیمتیں علی الترتیب  
جم لا، جب لا، ط لا کی رقوم میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو جم لا سے تقسیم کرنے سے  
مس لا (= ت) میں حسب ذیل کجی مساوات ملتی ہے

$$جم۳ ط - ۳(ط+لا) + ۳(ط+لا) - ۳(ط+لا) = ۳(ط+لا) - ۳(ط+لا) + ۳(ط+لا) - ۳(ط+لا)$$

$$= ک (جم + ط + جب + ط)$$

یا  $۳(ک جب + جب ۳ ط + ط ۳) + ۳(ک جم + جم ۳ ط + ط ۳)$

ت (ک جب + جب ۳ ط + ط ۳) + ک جم + جم ۳ ط + ط ۳ =

اس لیے دو درجی مساوات

$$۲(ک جب ہ + جب ۳) + ت(ک جم ہ + جم ۳) + ک جب ہ$$

$$- ۳ جب ۳ = ۰$$

کی اصلیں مس ط اور مس (ج - ط) ہیں !

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{مس ط} + \text{مس (ج - ط)}}{\text{ک جب ہ + جب ۳}} = \frac{\text{ک جم ہ + جم ۳}}{\text{ک جب ہ + جب ۳}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{مس ط مس (ج - ط)}}{\text{ک جب ہ + جب ۳}} = \frac{\text{ک جب ہ - ۳ جب ۳}}{\text{ک جب ہ + جب ۳}}$$

$$\text{ہیں} \quad \text{مس ج} = \frac{- (ک جم ہ + جم ۳)}{۳ جب ۳} = - \text{مم ۳}$$

$$\text{یا} \quad \text{ج} - ۳ = \pi \frac{1}{4} (۱ + ۲)$$

(85) جہاں رکوئی صحیح مد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط پر منحصر نہیں ہے۔

(۳) مساواتوں

$$\frac{\text{لاجم ط}}{\text{ب}} + \frac{\text{ماجب ط}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا لاجب ط} - \text{ماجم ط}}{\text{ب}} = (\frac{\text{ا لاجب ط}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب لاجب ط}}{\text{ب}})$$

سے ط ساقط کر دو۔

ہر مساوات کا مربع کو اور مس ط = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$ت^۲ - (۱ - \frac{۱}{ب}) ت - \frac{لا}{ب} = ۰$$

$$ت^۲ - (۱ - \frac{۱}{ب}) ت + ۱ = ۰$$

ان مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت اور ت کے لیے حل کر لے سے

$$\frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب}) + \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب}) - \frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب}) - \frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب}) - \frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب})$$

پس

$$\left\{ \frac{ب-ب}{ب} + \frac{ب-ب}{ب} \right\} \left\{ \frac{ب-ب}{ب} - \frac{ب-ب}{ب} \right\} = \left\{ \frac{ب-ب}{ب} - \frac{ب-ب}{ب} \right\} \left\{ \frac{ب-ب}{ب} + \frac{ب-ب}{ب} \right\}$$

$$یا \left\{ \frac{ب-ب}{ب} - \frac{ب-ب}{ب} \right\} \left\{ \frac{ب-ب}{ب} + \frac{ب-ب}{ب} \right\} = \left\{ \frac{ب-ب}{ب} + \frac{ب-ب}{ب} \right\} \left\{ \frac{ب-ب}{ب} - \frac{ب-ب}{ب} \right\}$$

$$اس لیے \frac{ب}{ب} + \frac{ب}{ب} = ب + ب$$

مائل استقامت ہے۔

(۳) مساواتوں

$$ب جب ط + ما جم ط = ۲ جب ۲ ط$$

$$لا جم ط - ما جم ط = ۲ جب ۲ ط$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$لا = ۲ جب ط (۲ - جم ط) ، ما = ۲ جب ط (۲ + جم ط)$$

$$یا لا = ۲ جب ط (جم ط + ۳ جب ط) ، ما = ۲ جب ط (جم ط + ۳ جب ط)$$

$$ایسے لا + ۱ = ۲ جب ط (جم ط + ۳ جب ط) ، لا - ۱ = ۲ جب ط (جم ط - ۳ جب ط)$$

$$پس (لا + ۱) \frac{۲}{ب} = ۲ جب ط (۱ + جم ط) (لا - ۱) \frac{۲}{ب} = ۲ جب ط (۱ - جم ط)$$

اور حاصل استقامت ہے

$$\frac{۲}{ب} = \frac{۲}{ب} (لا + ۱) + \frac{۲}{ب} (لا - ۱)$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان ہشتے

۱۷۔ مثالیں۔

(۱) مساوات  $ا.جم ط + ب جب ط = ج$   
پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ط کی دو الگ الگ قیمتیں  $ع$  بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$ا.جم ع + ب جب ع = ج$$

$$ا.جم ب + ب جب ب = ج$$

اس لیے

(86)

$$\frac{ج}{جب (ب - ع)} = \frac{ب}{جم ع - جم ب} = \frac{ا}{جم ب - جب ع}$$

$$مس \frac{1}{ا} = (ب + ع) \frac{1}{ا} = \frac{ب}{ا}$$

انڈیز  $\frac{1}{ج} جم ا = \frac{1}{ب - ع} = \frac{1}{ب} جب ا = \frac{1}{ا} جم (ب + ع)$   
ان رشتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے :- رکھو  $مس \frac{1}{ا} ط = ت$   
تو دی ہوئی مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$ا (ا - ت) + ۲ ب ت = ج (ا + ت)$$

$$ت (ا + ج) - ۲ ب ت + ج - ا = ۰$$

اس دو درجی کی اصلیں  $مس \frac{1}{ا} ع$  مس  $\frac{1}{ا} ب$  ہیں، اس لیے

$$مس \frac{1}{ا} ع - مس \frac{1}{ا} ب = \frac{ج - ا}{ا + ج}$$

اس لیے رابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ج}{ا} = \frac{جم (ب - ع)}{جم (ب + ع)}$$

$$مس \frac{1}{ا} ع + مس \frac{1}{ا} ب = \frac{۲ ب}{ا + ج}$$

نیز

جس سے دوسرا رابطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

(۲) مساوات

$$۱. جم ۲ ط + ب جب ۲ ط + ج. جم ط + و جب ط + ع = ۰$$

پر غور کرو۔

فرض کرو ت = مس ۱ ط تو دی ہوئی مساوات کو ت میں چار درجہ کے طور پر لکھا جا سکتا ہے چنانچہ

$$ت (۱ - ج + ع) + ت (۴ - ب + د) + ت (۶ - ۱ + ع) = ۰$$

$$+ ت (۲ + ب + د) + ت (۱ + ج + ع) = ۰$$

اگر اس چار درجہ کی اصلیں مس ۱ ط، مس ۲ ط، مس ۳ ط، مس ۴ ط ہوں تو

$$۳ مس ۱ ط = ۴ - ب + د، ۲ مس ۱ ط = ۱ - ج + ع، ۱ مس ۱ ط = ۶ - ۱ + ع$$

$$۳ مس ۱ ط + ۲ مس ۱ ط + ۱ مس ۱ ط = ۴ - ب + د + ۱ - ج + ع + ۶ - ۱ + ع$$

$$۱ + ج + ع + ۶ - ۱ + ج + ع = ۱۱ + ج + ع$$

جا سکتے ہیں۔

$$۱ مس ۲ ط + ۲ مس ۱ ط + ۳ مس ۱ ط = ۱۱ + ج + ع$$

$$۳ مس ۱ ط - ۲ مس ۱ ط - ۱ مس ۱ ط = ۱۱ + ج + ع$$

$$۱ - ۳ مس ۱ ط + ۲ مس ۱ ط + ۱ مس ۱ ط = ۱۱ + ج + ع$$

$$\frac{ب}{۱} = \frac{(۴ - ب + د) + د - ۲ + ۱ - ج + ع + ۶ - ۱ + ج + ع}{۱ - ج + ع + ۶ - ۱ + ج + ع}$$

طالب علم حسب ذیل رفتہ رفتہ مشتق کے طور پر ثابت کرے۔

$$\frac{۱}{جم س} = \frac{ب}{جم س} = \frac{ج}{جم س} = \frac{د}{جم س} = \frac{ع}{جم س}$$

(۳) اگر

جب عہ جم (عہ + ط) مس ۲ = جب ب جم (بہ + ط) مس ۲ = جب ج جم (جہ + ط) مس ۲ ج  
= جب ضہ جم (ضہ + ط) مس ۲ ضہ

(87)

اور عہ، ب، ج، ضہ میں سے کسی دو زاویوں میں  $\pi$  کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت  
کر دو کہ عہ + ب + ج + ضہ + ط،  $\pi$  کا ضعف ہے۔

مساوی مقداروں میں سے ہر مقدار کو ک کے مساوی رکھو تو عہ، ب، ج، ضہ

مساوات

جب لا جم (لا + ط) مس ۲ = ک

کی اصلیں ہیں۔ یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

۲ مس لا (جم ط - جب ط مس لا) = ک (۱ - مس لا)

پس  $\frac{2 \text{ مس عہ}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ جب ط}}{\text{ک}}$ ،  $\frac{2 \text{ مس ب}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ ج ط}}{\text{ک}}$ ،  $\frac{2 \text{ مس ضہ}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ ج ط}}{\text{ک}}$

$\frac{2 \text{ مس عہ}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ مس ب}}{\text{ک}}$ ،  $\frac{2 \text{ مس ب}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ مس ج}}{\text{ک}}$ ،  $\frac{2 \text{ مس ج}}{\text{ک}} = \frac{2 \text{ مس ضہ}}{\text{ک}}$ ۔

اس لیے مس (عہ + ب + ج + ضہ) =  $\frac{2 \text{ جب ط}}{\text{ک - ۲}} = \frac{2 \text{ ج ط}}{\text{ک - ۲}}$ ۔

پس عہ + ب + ج + ضہ + ط،  $\pi$  کا ضعف ہے۔

(۴) اگر عہ، ب، ج، غیر مساوی زاویے ہوں ہر ایک  $\pi$  سے کم تو ثابت

کر دو کہ مساواتیں

جم (عہ + ط) ق ۲ = جم (بہ + ط) ق ۲ = جم (جہ + ط) ق ۲ ج

ایک ساتھ موجود نہیں ہو سکتیں جب تک کہ

جم (بہ + ج) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + ب)

صفر کے مساوی نہ ہو۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

$$\text{جم } \epsilon \text{ جم } \tau - \text{جب } \epsilon \text{ جب } \tau - \text{ک جم } \epsilon = \epsilon .$$

$$\text{جم } \epsilon \text{ جم } \tau - \text{جب } \epsilon \text{ جب } \tau - \text{ک جم } \epsilon = \epsilon .$$

$$\text{جم } \epsilon \text{ جم } \tau - \text{جب } \epsilon \text{ جب } \tau - \text{ک جم } \epsilon = \epsilon .$$

جم  $\tau$  اور جب  $\tau$  کو ساقط کرنے سے

$$\epsilon \text{ جم } \epsilon \text{ جب } (\epsilon - \tau) = \epsilon .$$

$$\epsilon \text{ جم } (\epsilon + \tau) \text{ جب } (\epsilon - \tau) = \epsilon . \text{ بموجب مثال (۲) دفعہ ۶۸}$$

$$\epsilon \text{ جم } (\epsilon + \tau) = \epsilon . \text{ مولے اس صورت میں جب کہ } \epsilon \text{ جم } (\epsilon - \tau) = \epsilon .$$

$$\text{یعنی جبکہ جب } \frac{1}{\tau} (\epsilon - \tau) \text{ جب } \frac{1}{\tau} (\epsilon - \tau) = \epsilon .$$

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہو سکتی ہے۔

## اعظم اور اقل قیمتیں - لاتساویات

۲۔ — مثالیں —

$$(۱) \text{ جم } \tau + \text{ب جب } \tau \text{ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے } \overline{\text{ما } \tau + \text{ب}^2}$$

$$\text{رکھو } \frac{\tau}{\epsilon} = \text{مس } \epsilon \text{ تو ب} = \overline{\text{ما } \tau + \text{ب}^2} \text{ جب } \epsilon \text{ ر} = \overline{\text{ما } \tau + \text{ب}^2} \text{ جم } \epsilon$$

$$\text{اس طرح } \text{جم } \tau + \text{ب جب } \tau = \overline{\text{ما } \tau + \text{ب}^2} \text{ جم } (\tau - \epsilon)$$

اب چونکہ جم  $(\tau - \epsilon)$  ہمیشہ  $\pm ۱$  کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لیے وجم  $\tau - \epsilon$  جب  $\epsilon \pm \overline{\text{ما } \tau + \text{ب}^2}$  کے درمیان واقع ہوگا۔

$$(۲) \text{ اگر } \epsilon = \overline{\text{ما } \tau \text{ جم } \tau + \text{ب}^2} + \overline{\text{ما } \tau \text{ جب } \tau + \text{ب}^2} \text{ جم } \tau$$



تو،  $ر + ب$  اور  $لا$   $\frac{۲}{۳}(ر + ب)$  کے درمیان واقع ہوگا۔

$$\text{فرض کرو } لا = ر + جم ط + ب + جب ط = \frac{۱}{۳}(ر + ب) + \frac{۱}{۳}(ر - ب) + جم ط$$

$$\text{تب } ع = لا + \overline{لا + ر + ب - لا}$$

$$ع = ر + ب + \frac{۲}{۳}لا - \frac{۱}{۳}(ر + ب) - \frac{۱}{۳}(ر - ب) - لا$$

پس  $ع$  بڑے سے بڑا ہے جبکہ  $لا = \frac{۱}{۳}(ر + ب)$  یا  $ع$  کی بڑی سے بڑی قیمت  $\frac{۲}{۳}(ر + ب)$  ہے نیز  $ع$  کم سے کم ہے جبکہ  $\frac{۱}{۳}(ر + ب) - لا$  بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ  $لا$  کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ  $جم ط = -ا$  اور اس صورت میں  $لا = ب$  اور  $تب ع = ر + ب$  اس لیے یہی کم سے کم قیمت ہے۔

(۳) اگر  $ط$ ، صفر اور  $\pi$  کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$مم ط - \frac{۱}{۳}ط < ۲$$

چونکہ

$$مم ط - \frac{۱}{۳}ط = \frac{جم ط + ۱ - ۲}{جب ط} = \frac{۳ - ۲ جب ط}{جب ط} = \frac{جب ط}{جب ط}$$

$$\text{پس } مم ط - \frac{۱}{۳}ط = مم ط + مم ط - \frac{۱}{۳}ط$$

اب اگر  $ط$ ، صفر اور  $\pi$  کے درمیان واقع ہے تو  $مم ط$  اور  $مم ط - \frac{۱}{۳}ط$  ہر ایک ایکائی سے ہرگز کم نہیں ہو سکتا، اس لیے  $مم ط - \frac{۱}{۳}ط < ۲$ ،

(۴) اگر ن زاویوں کا جن میں سے ہر ایک قیمت ہے اور  $\frac{1}{2}\pi$  سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ ان زاویوں کی جیب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب اسے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔  
فرض کرو کہ  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  زاویے ہیں اور ان کا حاصل جمع  $\alpha$  ہے۔

ب جب  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2$  جب  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$  اور  
تو کہ  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$  ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ  $\alpha = \beta = \gamma = \dots$

س لیے جب  $\alpha + \beta + \gamma + \dots > 2$  جب  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$

لہذا  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  اس لیے اگر  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  میں سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم ان دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کر کے  
یہ جب کہ بڑھا سکتے ہیں، پس  $\alpha + \beta + \gamma + \dots$  سے بڑا ہے جب سب زاویے  
مساوی ہوں؛

س لیے  $\alpha + \beta + \gamma + \dots$  جب  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$ ۔

نیز جب  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2$  جب  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$

دریہ  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots) > \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$

$> \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$

لہذا  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کر کے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  
جب  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  سے بڑا ہے جبکہ  $\alpha = \beta = \gamma = \dots$  اور اس  
حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$  ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں۔

ہونگے  
قم عمر + قم عس

$$= \text{جب } \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عس}) \left\{ \frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عس}) - \frac{1}{4} (\text{جم} - \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عس})) \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عس}) + \frac{1}{4} (\text{جم} - \frac{1}{4} (\text{عمر} + \text{عس}))$$

پس عمر + عس کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم صر + قم عس کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ  
جم -  $\frac{1}{4} (\text{عمر} - \text{عس}) = 1$  یا جبکہ صر = عس - اس کے بعد استدلال کی صورت دی ہوگی جو پچھلی مثال کی ہے۔

(89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے حاصل  
یا حاس التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں۔

$$(۷) \text{ اگر } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{1}{2}$$

## مساواتوں کے استنباطی نظام

۷۳ — مساواتوں کے نظام کو استنباطی کہا جائیگا جب کہ مساواتیں  
باہم موافق نہ ہوں الا آنکہ سب ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔  
جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لا متناہی ہونگے۔

نظام

و۔ جم۔ جم۔ جم۔ ب۔ جب۔ جب۔ ج۔ و۔ (جب۔ جب۔ ب۔) جم۔ جم۔ جم۔

+ ج۔ جب۔ (ب۔ ج۔) = ۰

و۔ جم۔ جم۔ جم۔ ب۔ جب۔ جب۔ ج۔ و۔ (جب۔ جب۔ ب۔) جم۔ جم۔ جم۔

+ ج۔ جب۔ (ج۔ ب۔) = ۰

و۔ جم۔ جم۔ جم۔ ب۔ جب۔ جب۔ ج۔ و۔ (جب۔ جب۔ ب۔) جم۔ جم۔ جم۔

+ ج۔ جب۔ (ب۔ ج۔) = ۰

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔

مساوات

و۔ جم۔ جم۔ جم۔ ب۔ جب۔ جب۔ ج۔ و۔ (جب۔ جب۔ ب۔) جم۔ جم۔ جم۔

+ ج۔ جب۔ (ب۔ ج۔) = ۰

پروفر کر دیے مساوات پوری ہوتی ہے ط = ب۔ اور ط = ج۔ سے۔ اس کو مس = ط = م

کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح :

م۔ (و۔ جم۔ ج۔ + و۔ جب۔ ب۔ جم۔ ب۔ - ج۔ جب۔ ب۔)

+ ۲م (ب۔ جب۔ ب۔ و۔ + و۔ ج۔ جم۔ ج۔) + (و۔ جم۔ ج۔ + و۔ جب۔ ب۔ ب۔ + ب۔ جب۔ ب۔)

+ ج۔ جب۔ (ب۔ ج۔) = ۰

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

مس = ۱/۲ + مس = ۱/۲ ج۔ اور مس = ۱/۲ ب۔ مس = ۱/۲ ج۔

پس مس = ۱/۲ (ب۔ ج۔) = ۱/۲ (ب۔ جب۔ ب۔ و۔ + و۔ ج۔ جم۔ ج۔) + ۱/۲ (و۔ جم۔ ج۔ + و۔ جب۔ ب۔ ب۔ + ب۔ جب۔ ب۔)

اسی طرح ہمیں ماصل ہونا چاہیے

مس = ۱/۲ (ج۔ ب۔) = ۱/۲ (ب۔ جب۔ ب۔ و۔ + و۔ ج۔ جم۔ ج۔) + ۱/۲ (و۔ جم۔ ج۔ + و۔ جب۔ ب۔ ب۔ + ب۔ جب۔ ب۔)

اب ہم مس  $\frac{1}{4}$  (ع - ہ) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں؛ یہ قیمت ایک کسر ہوگی جس کا شمار کنندہ ہے

$$(ب جب ہ + ا + ج جم ہ) (ا جم ع + ب + ج جب ع) - (ب جب ع + ا + ج جم ع) \\ \times (ا جم ہ + ب + ج جب ہ)$$

$$۲ جب \frac{1}{4} (ع - ہ) \{ (ج - ا ب) جم \frac{1}{4} (ع - ہ) + (ا ج - ب ب) جم \frac{1}{4} (ع + ہ) \} \\ - (ا ا - ب ج) جب \frac{1}{4} (ع + ہ) \{$$

اور نصب نما ہے (90)

$$(ب جب ع + ا + ج جم ع) (ب جب ہ + ا + ج جم ہ) + (ا جم ع + ب + ج جب ع) \\ (ا جم ہ + ب + ج جب ہ)$$

$$(ا + ج) جم ع جم ہ + (ب + ج) جب ع جب ہ + (ا + ب) \\ + (ا ب + ب ج) (ب جب ع + ج جب ہ) + (ا ج + ا ب) (جم ع + جم ہ) \\ + (ا + ب) (ج جب ع + ہ) :$$

اس کسر کو جب  $\frac{1}{4}$  (ع - ہ) سے تقسیم کر دو یہ نصب نما  
 $= (ج - ا ب) \{ (ا + جم ع - ہ) \} + (ا ج - ب ب) (جم ع + جم ہ) - (ا ا - ب ج) (ب جب ع + جب ہ)$   
 پس

$$(ا + ب) \{ (ا جم ع جم ہ + ب جب ع جب ہ + ج + ا) (ب جب ع + جب ہ) \\ + ب (جم ع + جم ہ) + ج جب ع (ع + ہ) \} \\ = ج - ا - ب + ج + ا + ج - ا ب$$

اس لیے جب تک کہ شرط

$$ج^2 - د^2 - ب^2 + ج + ا + ج ب - ا ب = 0$$

پوری نہ ہو مساواتوں کا دیا ہوا نظام پورا نہیں ہو سکتا سوائے  $ع = ب = ج$  کی مساوی قیمتوں کے۔ جب یہ شرط پوری ہو تو کوئی ایک مساوات باقی دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

## سلسلوں کو جمع کرنا

۴۔ بہت سے سلسلے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں فرقوں کے طریقہ سے جمع کیے جا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کے استعمال کی سب سے اہم مثال وہ سلسلہ ہے جو ان مقداروں کی جیوب یا جیوب التمام کا ہوتا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$س = ج م + ع + ج م (ع + ب) + ج م (ع + ۲ ب) + ۰۰۰ + ج م (ع + (ن-۱) ب)$$

اب چونکہ

$$ج م = \frac{۱}{۲} ج م \left[ ج م (ع + \frac{۱}{۲} ب) - ج م (ع - \frac{۱}{۲} ب) \right]$$

$$ج م (ع + ب) = \frac{۱}{۲} ج م \left[ ج م (ع + \frac{۳}{۲} ب) - ج م (ع + \frac{۱}{۲} ب) \right]$$

$$ج م (ع + (ن-۱) ب) = \frac{۱}{۲} ج م \left[ ج م (ع + \frac{(ن-۱)+۱}{۲} ب) - ج م (ع + \frac{(ن-۱)-۱}{۲} ب) \right]$$

$$اس لیے س = \frac{۱}{۲} ق م \frac{۱}{۲} ب \left\{ ج م (ع + \frac{(ن-۱)+۱}{۲} ب) - ج م (ع - \frac{۱}{۲} ب) \right\}$$

$$= ج م (ع + \frac{(ن-۱)+۱}{۲} ب) ج م \frac{(ن-۱)+۱}{۲} ق م \frac{۱}{۲} ب - ج م (ع - \frac{۱}{۲} ب) ج م \frac{۱}{۲} ق م \frac{۱}{۲} ب$$

(91)

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

$$= \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲} \quad (۲)$$

اس حاصل جمع کو (۱) میں  $\frac{ن}{۲}$  کی بجائے  $\frac{ن}{۲} + ۱$  درج کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

(۱) میں  $\frac{ن}{۲}$  کی بجائے  $\frac{ن}{۲} + ۱$  رکھو تو سلسلہ

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

کا حاصل جمع ہوگا

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

ہو جب اس کے کن طاق ہو یا جفت۔

سلسلہ

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} = \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

نیز  $\frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$  کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جب } \frac{ن}{۲} + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۱) + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + ۲) + \dots + \text{جب } (\frac{ن}{۲} + (ن-۱)) + \frac{ن}{۲}$$

چونکہ  $\text{جم}^2 = \frac{1}{4} (1 + \text{جم}^2) \cdot \text{جم}^2 = (ب + ع) = \frac{1}{4} \{ (ب + ع) + 1 \} \dots$   
اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{جم}^2 + \frac{1}{4} (1 - ن) + ب \{ \text{جب } ن : \text{قم } ب$   
اسی طرح سلسلوں (۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی مثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) جمع کردہ سلسلہ  $\text{قم}^2 + \text{قم}^2 + \dots + \text{قم}^2 + \text{قم}^2$

چونکہ  $\text{قم}^2 = \text{قم}^2 - \text{قم}^2 = \text{قم}^2 - \text{قم}^2 = \text{قم}^2 - \text{قم}^2 \dots$

$\text{قم}^2 = \text{قم}^2 - \text{قم}^2 = \text{قم}^2 - \text{قم}^2$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے  $\text{قم}^2 - \text{قم}^2$   
(۴) جمع کردہ سلسلہ

$$\frac{\text{جم}^3 - \text{جم}^3}{\text{جم}^3} + \dots + \frac{\text{جم}^3 - \text{جم}^3}{\text{جم}^3} + \frac{\text{جم}^3 - \text{جم}^3}{\text{جم}^3}$$

چونکہ  $\text{مس}^3 - \text{لا}^3 = \frac{1}{3} \text{مس}^3$

$$\frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3}$$

$$\frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3}$$

(92)

$$\frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3} = \frac{\text{جم}^3 - \text{لا}^3}{\text{جم}^3}$$



اس لیے 
$$\frac{۳}{۴} = \frac{۳ \text{ جب } ۱ - \text{ جب } ۲}{۳ \text{ جم } ۱} \left( \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۳ - \text{ مس } ۱ \right)$$

اس لیے 
$$\frac{۳}{۴} = \frac{۳ \text{ جب } ۲ - \text{ جب } ۱}{۳ \text{ جم } ۲} \left( \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۳ - \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۱ \right)$$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے 
$$\frac{۳}{۴} = \frac{۳ \text{ جب } ۱ - \text{ جب } ۲}{۳ \text{ جم } ۱} \left( \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۳ - \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۱ \right)$$

$$\left( \frac{۱}{۳} \text{ مس } ۳ - \text{ مس } ۱ \right) \frac{۳}{۴}$$

## ۷۵۔ شکلوں

ع<sub>۱</sub> جم ع + ع<sub>۲</sub> جم (ع + ب) + ع<sub>۳</sub> جم (ع + ب + ۲) + ... + ع<sub>ن</sub> جم (ع + (ن - ۱) ب) {  
ع<sub>۱</sub> جب ع + ع<sub>۲</sub> جب (ع + ب) + ع<sub>۳</sub> جب (ع + ب + ۲) + ... + ع<sub>ن</sub> جب (ع + (ن - ۱) ب) {  
میں سے کسی شکل سے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کیا جاسکتا ہے اگر ع<sub>۱</sub> کا  
ایک منطق صحیح تفاعل ہو جس کا درجہ کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

فرض کرو کہ مس = ع<sub>۱</sub> جم ع + ع<sub>۲</sub> جم (ع + ب) + ع<sub>۳</sub> جم (ع + ب + ۲) + ... + ع<sub>ن</sub> جم (ع + (ن - ۱) ب)

تب

ع<sub>۲</sub> جم : ع<sub>۱</sub> = ع<sub>۱</sub> {جم (ع - ب) + جم (ع + ب)} + ع<sub>۲</sub> {جم (ع + ب) + جم (ع + ب + ۲)}

+ ... + ع<sub>ن</sub> {جم (ع + (ن - ۲) ب) + جم (ع + (ن - ۱) ب)}

+ ... + ع<sub>ن</sub> {جم (ع + (ن - ۲) ب) + جم (ع + (ن - ۱) ب)}



(۲) جمع کرو سلسلہ

جم ۱ + جم ۲ + جم ۳ + ... + جم (ن-۱) + جم ۱  
 یہ سلسلہ کچلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو ۲ (۱-جم ۱) سے ضرب دیا جائے۔

۷۶ — سلسلہ

جم ۱ + لا جم ۲ + لا جم ۳ + ... + لا جم (ن-۱) + لا جم ۱  
 جب ۱ + لا جب ۲ + لا جب ۳ + ... + لا جب (ن-۱) + لا جب ۱  
 متوالی سلسلے میں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of retation) ۱-۲ لا جم ۱ + لا ہے  
 کیونکہ

جم ۱ + جم ۲ = جم ۳ + جم ۴ = ... = جم (ن-۱) + جم ۱  
 اور جب ۱ + جب ۲ = جب ۳ + جب ۴ = ... = جب (ن-۱) + جب ۱  
 اس لیے ان کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمولی قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا  
 ہے۔ اگر اس سے پہلے سلسلہ کا حامل جمع تعبیر ہو تو

س (۱-۲ لا جم ۱ + لا)

= جم ۱ - لا جم ۲ - لا جم ۳ - لا جم ۴ - ... - لا جم (ن-۱) + لا جم ۱  
 اگر لا > ۱ تو ن کو لا انتہا بڑا کرنے سے لا تنہا ہی سلسلہ

جم ۱ + لا جم ۲ + لا جم ۳ + لا جم ۴ + ... + لا جم (ن-۱) + لا جم ۱

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{جم ۱} - \text{لا جم ۲}}{۱ - ۲ لا جم ۱ + لا}$$

رکھو  $e = 0$  تو

$$1 + 1 + 2 + 2 + \dots + \infty = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

اس لیے نیز

$$1 + 2 + 2 + 2 + \dots + \infty = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad (3)$$

بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم مثلاً دفعہ ۴ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لینگے۔

(94) فرض کرو کہ  $1, 1, 1, 1, \dots$  ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں، اور فرض کرو کہ  $1, 1, 1, 1, \dots$  کے درمیان زاویہ ہر جہاں  $1$  دائرہ کا مرکز ہے، خط ستقیم  $1$  کھینچو ایسا کہ  $1 = e$  تب  $1, 1, 1, 1, \dots$  کے میلان  $1$  کے ساتھ علی الترتیب یہ ہیں

$$e + e + e + \dots + (n - 1)$$

اور  $1$  کا میلان  $e + \frac{1}{n} (n - 1)$  ہے، نیز اگر دائرہ کا قطر ہو تو

$$1 = 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

اب دیکھو  $1, 1, 1, 1, \dots$  کے ظلوں کا مجموعہ ہے

$$1 + 1 + 1 + \dots + (e + e) + \dots + (e + e) + (n - 1)$$

$$1 + 1 + 1 + \dots + (e + e) + \dots + (e + e) + (n - 1)$$

اور یہ مجموعہ  $1$  کے ظل کے مساوی ہونا چاہیے۔ جو یہ ہے

$$1 + 1 + 1 + \dots + (e + e) + \dots + (e + e) + (n - 1)$$

یا ق جب  $\frac{1}{p}$  ن بہ جم  $\{ع + \frac{1}{p}(ن - ۱) بہ\}$

اس لیے

جم  $ع + جم (ع + بہ) + \dots + جم \{ع + (ن - ۱) بہ\}$

$= جم \{ع + \frac{1}{p}(ن - ۱) بہ\}$  جب  $\frac{1}{p}$  ن بہ قم  $\frac{1}{p}$  بہ

اگر ہم دلا کے عمود دار خط مستقیم پر نقل لیں تو جواب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملے گا۔

## امثلہ

(۱) ایک دائرہ کا قطر و ا ہے اس کے محیط پر د، ف، ق، ... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں ف ا و، ق ا ف، م ا ق، ... میں سے ہر ایک د ہے۔ ا ف ا ق، م، ... دیرے ماس سے ف ق پر ملتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ قط م، قط (م + ۱) ع + قط (م + ۱) ع، قط (م + ۲) ع + ... ن رقموں تک کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر د، ب، ج، ... کے زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو  
قط د، قط (د + ب) جب ب + قط (د + ب) قط (د + ب + ج) جب ج  
+ قط (د + ب + ج) قط (د + ب + ج + د) جب د + ...  
= قط د، قط (د + ب + ج + ... + د) جب (د + ب + ج + ... + د) (ک)

## پچھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں  $جم ط + ا، جم ط = ب، جب ط + ا، جب ط = ج$  سے ط ساقط کرو۔

(۲) مساواتوں  $(ا + ب) مس (ط - ذ) = (ا - ب) مس (ط + ذ)$  سے ط ساقط کرو۔  
 $ا. جم ۲ ذ + ب. جم ۲ ط = ج$

(۳) ثابت کرو کہ

(95)

(ا. جب ذ + ب. جم ذ) (ا. جب پ + ب. جم پ) جب (ذ - پ)  
 + (ا. جب پ + ب. جم پ) (ا. جب ط + ب. جم ط) جب (پ - ط)  
 + (ا. جب ط + ب. جم ط) (ا. جب ذ + ب. جم ذ) جب (ط - ذ)  
 + (ا. ب + ب) (ا. جب (ذ - پ) جب (پ - ط) جب (ط - ذ) = ۰  
 اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۴) مساوات  $جم ط - جم ۲ = ۲. جم ط (جم ط - جم ۲) - ۲. جب ط (جب ط - جب ۲)$  کو سادہ ترین شکل میں تبدیل کرو اور اس کو حل کرو۔

(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  کا مجموعہ  $۹۰$  سے کم ہے جبکہ یہ زاویے رشتہ  $جم ا + جم ب + جم ج = ا$  کو پورا کرتے ہوں۔

(۶) اگر  $ا + ب + ج = ۹۰$  تو ثابت کرو کہ  $مس ا + مس ب + مس ج$  کی کم سے کم قیمت ایک ہے۔

(۷) مساواتوں

$$\begin{cases} جب ط + جب ذ + جب ۲ = جم ط + جم ذ + جم ۲ \\ ط + ذ = ۲۰ \end{cases}$$

سے ط اور ذ معلوم کرو۔

(۸) اگر  $ا + ب + ج = ۱۸۰$  تو ثابت کرو کہ

$$۸. جب ا + ۱. جب ب + ۱. جب ج = ۱$$

(۹) اگر

$$\frac{\text{لا جب ط} + \text{ما جب ذ} + \text{ی جب پ}}{\text{لا جم ط} + \text{ما جم ذ} + \text{ی جم پ}} = \frac{\text{۴ جب ط جب ذ جب پ} + \text{جب (ط + ذ + پ)}}{\text{۴ جم ط جم ذ جم پ} - \text{جم (ط + ذ + پ)}}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا جب } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{ا جب } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{ی جب } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})}{\text{لا جم } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) + \text{ا جم } \frac{1}{4} (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{ی جم } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ})}}$$

$$= \frac{\text{۴ جب } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ}) (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) + \text{جب } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} + \text{پ})}{\text{۴ جم } \frac{1}{4} (\text{ذ} + \text{پ} - \text{ط}) (\text{ط} + \text{ذ} - \text{پ}) (\text{پ} + \text{ط} - \text{ذ}) - \text{جم } \frac{1}{4} (\text{ط} + \text{ذ} + \text{پ})}}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ  $\frac{\text{ح جب ۳ ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \text{جب (ع + ب + ج)}$

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

$$\frac{\text{ح جب ن ع جب (ب - ج)}}{\text{ح جب ۲ (ج - ب)}} = \{ \text{جب (ف + ق + ب + ر ج)} \}$$

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

$$\text{۱}^{\circ} \text{ جم ع جم ب} + \text{۱} (\text{جب ع} + \text{جب ب}) + ۱ = ۰$$

$$\text{۲}^{\circ} \text{ جم ع جم ج} + \text{۱} (\text{جب ع} + \text{جب ج}) + ۱ = ۰$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{۳}^{\circ} \text{ جم ب جم ج} + \text{۱} (\text{جب ب} + \text{جب ج}) + ۱ = ۰$$

جہاں ب، ج کم ہیں π سے۔

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط، ط ہوں جو مساوات

$$1 + \frac{\text{جم ط جم فہ}}{\text{جم}^2 \text{عہ}} + \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب}^2 \text{عہ}} = 0$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط اور ط مدح کے لئے جائیں تو وہ مساوات کو پورا کریں گے۔

(96)

(۱۳) اگر

$$\begin{aligned} & 1 + \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب جب}^2 \text{عہ جب} = \text{ج}^2, \quad 1 + \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب جب}^2 \text{عہ} = \text{ج}^2 \\ & 1 + \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب جب}^2 \text{عہ جب} = \text{ج}^2, \quad 1 + \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب جب}^2 \text{عہ} = \text{ج}^2 \\ & 1 + \text{جم}^2 \text{عہ} + \text{ب جب}^2 \text{عہ} = \text{ج}^2 \end{aligned}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}}\right) \left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}}\right) \left(\frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}}\right) = \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}} + \frac{1}{\text{ط}}$$

جہاں زادیے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲ کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

$$\text{جب} (\text{ط} + \text{عہ}) = \text{جب} (\text{فہ} + \text{عہ}) = \text{جب} :$$

$$\text{اور } \text{جب} (\text{ط} + \text{فہ}) + \text{ب جب} (\text{ط} - \text{فہ}) = \text{ج}$$

تو ثابت کرو کہ یا

$$\text{جب} (\text{عہ} \pm \text{بہ}) = -\text{ج}, \quad \text{یا } \text{جب}^2 \text{عہ} \pm \text{ب جب}^2 \text{عہ} = \text{ج}$$

$$(15) \text{ اگر مساوات } \text{جب}^2 \text{ط}^2 + \text{عہ}^2 \text{ط}^2 + \text{جم}^2 \text{ط}^2 + \text{جم}^2 \text{عہ}^2 = 1$$

درست رہے جبکہ ن = اتو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔



(۱۶) مساواتوں

$$\begin{aligned} & ۴ (جم + جم ط + جم ذ) (جم + جم ط + جم ذ) \\ & = ۴ (جم + جم ط + جم پ) (جم + جم ط + جم پ) = (جم ذ - جم پ) (جم ذ - جم پ) (جم ذ - جم پ) \\ & \text{سے ط ساقط کرو، اور ثابت کرو کہ جم (ذ - پ) = ۱، یا جم ۲ =} \end{aligned}$$

$$(۱۶) \text{ اگر } \frac{مس ا}{مس ب} = \frac{جم (لا - ع)}{جم ب} \text{ اور } \frac{مس ا}{مس ب} = \frac{جم لا}{جم ۲ - جم ۱}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{مس ا}{جم ب} = \frac{جم لا}{جم ۲ - جم ۱}$$

(۱۸) اگر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

$$\frac{جم (۲ - ۱ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱)}{جم (۲ + ۱ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱)} = \frac{جم (۲ - ۱ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱)}{جم (۲ + ۱ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱)}$$

ایک واحد مساوات

$$جم ۲ (۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱) + جم ۱ (۲ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۰) = ۰$$

کے غائل ہے۔

$$(۱۹) \text{ اگر } لا = ۲ (جم (ب - ج) + جم (ط + ع) + جم (ط - ع))$$

$$= ۲ (جم (ب - ج) + جم (ط + ع) + جم (ط - ع))$$

$$= ۲ (جم (ب - ج) - جم (ط + ج) - جم (ط - ج))$$

تو ثابت کرو کہ لا = جب ط اگر زادیوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ سے کسی دو کا فرق نہ معدوم ہو اور ۱۲ کے کسی ضعیف کے مساوی ہو۔

$$(۲۰) \text{ اگر } ۱ + ب + ج = ۱۸۰ \text{ اور اگر}$$

$$\text{حجب (۱+ن)} \mid \text{جب (ب-ج)} = ۰$$

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{حجب (۱-ن)} \mid \text{جب (۱+ن)} \mid \text{جب (ب-ج)} = ۰$$

(۲۱) اگر  $\text{م} = \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) + \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) = ۰$

$$+ \text{م} = \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) = ۰$$

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں  $\pi$  کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{م} = \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) + \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) = ۰$$

$$+ \text{م} = \frac{۱}{۲} (ن+۲) (نجم-ج) = ۰$$

$$(۲۲) \text{ اگر } \frac{\text{جب (ب+ط)}}{\text{جب (ب+ذ)}} + \frac{\text{جب (ب+ط)}}{\text{جب (ب+ذ)}} = \frac{\text{جب (ب+ط)}}{\text{جب (ب+ذ)}} + \frac{\text{جب (ب+ط)}}{\text{جب (ب+ذ)}} = ۰$$

تو ثابت کرو کہ یا تو  $\pi$  کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا  $\pi$  کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

$$(۲۳) \text{ اگر } ۱. \text{جم (ذ+پ)} + \text{ب.جم (ذ-پ)} + \text{ج} = ۰$$

$$۲. \text{جم (پ+ط)} + \text{ب.جم (پ-ط)} + \text{ج} = ۰$$

$$۳. \text{جم (ط+ذ)} + \text{ب.جم (ط-ذ)} + \text{ج} = ۰$$

اور اگر ط، پ، ذ سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ  $۱. \text{ب} + ۲. \text{ب} + ۳. \text{ب} = ۰$

$$(۲۴) \text{ اگر } \frac{\text{جم (ب+ط)}}{\text{جم (ب+ذ)}} = \frac{\text{جم (ب+ط)}}{\text{جم (ب+ذ)}} = ۰$$

اور ب، ج غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$\frac{\text{جم} (ب + ج + ط)}{\text{جب} (ب + ج + ط)} =$$

$$\text{اور جم ط} = \frac{\text{جب} (ب + ج + ط) \text{ جب} (ج + ط + ب) \text{ جب} (ط + ب + ج)}{\text{جم} (ب + ج + ط) \text{ جم} (ج + ط + ب) \text{ جم} (ط + ب + ج)}$$

(۲۵) اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰ ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم} ا + \text{جم} ب + \text{جم} ج < ۱ \text{ اور } \frac{۳}{۲}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$۶۴ \text{ جب ط} + \text{جب ب} ط = ۰$$

(۲۷) اگر ۲ س = لا + ا + ی تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} (س - لا) + \text{مس} (س - ا) + \text{مس} (س - ی) = \text{مس} س$$

$$= \frac{\text{م جب لا جب ا جب ی}}{\text{ا۔ جم لا۔ جم ا۔ جم ی۔ ۲۔ جم لا۔ جم ا۔ جم ی}}$$

نیز مست (س - لا) + مست (س - ا) + مست (س - ی) = مست س

$$= \frac{۱۶ لا ا ی}{(لا^۲ + ا^۲ + ی^۲ - ۲(لا ا + ا ی + ی لا))}$$

$$(۲۸) \text{ اگر } \frac{\text{جم ط}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جم ف}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ف}}{\text{جب ب}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$۰ = ۱ + \frac{\text{جب ط جب ف}}{\text{جب ب جم ب}} + \frac{\text{جم ط جم ف}}{\text{جم ب جم ب}}$$

(۲۹) اگر  $۲$  جب  $۷$  جم  $(ط + ذ) = ۲$  جم  $(ط - ذ) +$  جم  $۷$

اور  $۲$  جب  $۷$  جم  $(ط + پ) = ۲$  جم  $(ط - پ) +$  جم  $۷$

تو ثابت کرو کہ  $۲$  جب  $۷$  جم  $(ذ + پ) = ۲$  جم  $(ذ - پ) +$  جم  $۷$

(۳۰) اگر جم  $(۷ - ی) +$  جم  $(ی - لا) +$  جم  $(لا - م) = -\frac{۳}{۴}$

تو ط کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جم } (لا + ط) + \text{جم } (ما + ط) + \text{جم } (ی + ط) - ۳ \text{ جم } (لا + ط) - \text{جم } (ما + ط) - \text{جم } (ی + ط) = ۰$$

(۳۱) اگر

$$\frac{\text{جب } ۱}{ل} = \frac{\text{جب } (۱ + ر)}{م} = \frac{\text{جب } (۲ + ر)}{ن}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم } ۱}{م^۲ - ل(ل + ن)} = \frac{\text{جم } (۱ + ر)}{م(ن - ل)} = \frac{\text{جم } (۲ + ر)}{ن(ل + ن) - ۲م^۲}$$

(۳۲) ثابت کرو کہ مساواتیں

$$(لا + \frac{۱}{لا}) \text{ جب } ۷ = \frac{۱}{ی} + \frac{۱}{ی} + \text{جم } ۷$$

$$(ما + \frac{۱}{ما}) \text{ جب } ۷ = \frac{۱}{ی} + \frac{۱}{ی} + \text{جم } ۷$$

$$(ی + \frac{۱}{ی}) \text{ جب } ۷ = \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا} + \text{جم } ۷$$

غیر صالح نہیں ہیں اور وہ

$$لا + ما + ی = \frac{۱}{ی} + \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا} = - \text{ جب } ۷$$

کے مثال ہیں -

۳۳ - ثابت کرو کہ جملہ



سے ط ساقط کرو۔

(۲۹) اگر  $\frac{\text{مس (ط-ع)}}{\text{ف}} = \frac{\text{مس (ف-ع)}}{\text{ق}} = \frac{\text{مس (پ-ع)}}{\text{ر}}$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف (ق-ر)} = \text{جم (ف-پ)} + \text{ق (ر-ف)} + \text{جم (پ-ط)} + \text{ر (ف-ق)} + \text{جم (ط-ذ)} = ۰$$

(۳۰)  $\frac{۱}{۱ + ۱ + \text{جم ط} + \text{ب جب ط}}$  کو اس شکل

$$۱ + ۱ + \text{جم (ط-ع)} + ۱ + \text{جم ۲ (ط-ع)} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۳۱) مساوات  $\text{مس ۳ ط} - \text{مس ۲ ط} - \text{مس ط} = ۰$  کو حل کرو۔

(۳۲) اگر

$$\text{جم}^۲ \text{ لا} + \text{جم}^۲ \text{ ما} = \text{جم}^۳ \text{ ع} + \text{جب}^۲ \text{ لا} + \text{جب}^۲ \text{ ما} = \text{جب}^۳ \text{ ع} + \text{اور لا} + \text{ما} = ۲ = ۰$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ر جب}^۳ \text{ (ع+ب)} = ۲ \text{ ع جب}^۲ + ۲ \text{ جب}^۲ \text{ (ع+ب)} + \text{جم}^۳ \text{ (ع+ب)}$$

(۳۳) اگر  $\text{جم}^۲ \text{ ف} + \text{جم}^۲ \text{ پ} + \text{ب جب ف} + \text{ب جب پ} = \text{ج}^۲$

$$\text{جم}^۲ \text{ پر جم ط} + \text{ب جب پ جب ط} = \text{ج}^۲$$

$$\text{جم ط جم ف} + \text{ب جب ط جب ف} = \text{ج}^۲$$

تو ثابت کرو کہ  $\text{ب ج} + \text{ج} + ۱ + \text{ا ب} = ۰$ ، الا آنکہ  $۱ = \text{ب} = \text{ج}$

(۳۴) حل کرو مساوات

$$\text{جم}^۲ \text{ (لا + ۱)} + \text{جم}^۲ \text{ لا} + \text{جم}^۲ \text{ (لا - ۱)} = \frac{۳}{۲}$$

(۳۵) مساواتوں

$$\begin{aligned} ۳ا + جب ذ + ب لا + جم ذ + رب (ا + جب ا ذ + ب) جم ذ = ۷۰ \\ ا لا قط ذ - ب ما قم ذ = ۳ا - ب \\ سے ذ سا قط کرو۔ \end{aligned}$$

(۳۶) حل کرو مساوات

$$\begin{aligned} جم ۵ ط + جم ۵ ط + جم ۱۰ ط = ۱۰ \\ مساواتوں (۳۷) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ا جم ط جم ۲ ط = ۲ (ا جم ط - لا) \\ وجب ط جب ۲ ط = ۲ (ا جب ط - ما) \\ سے ط سا قط کرو۔ \end{aligned}$$

(۳۸) ثابت کرو کہ مساوات  $۳ا + لا + ما = ن$  (جہاں  $ن$  صحیح عدد ہے) کے حل مثبت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\pi (۱ + ن ۲) \frac{۱}{۴} جم ۰}{\pi \frac{۱}{۴} جم ۰} (۱ - ۱) + ۲ + ن \right] \frac{۱}{۴} \\ حل کرو مساوات (۳۹) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶ جم ۳ ط - جب ۳ ط - ۱۰ جم ۲ ط + ۵ جب ۲ ط + ۲۲ جم ط - ۵ جب ط = ۱۰ \\ \frac{قم ط - مس ط}{قم ط + مس ط} \end{aligned}$$

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(۱۰۰) (۵۱) ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\begin{aligned} \frac{قط ا}{-۲} \frac{قط ا}{-۲} \frac{قط ا}{-۲} \\ = \frac{جم ۲ (۱ + ط جم ۵)}{جم ۲ (۱ + ط جم ۵)} \end{aligned}$$

..... ر خارج قسمتوں تک

(۵۲) مساواتوں

$$\begin{aligned} \text{ا} \text{جب} (\text{ط} - \text{ع}) + \text{ب} \text{جب} (\text{ط} + \text{ع}) &= \text{ا} \text{جب} (\text{ف} + \text{ب}) + \text{ب} \text{جب} (\text{ف} - \text{ب}) \\ \text{ا} \text{جم} (\text{ط} - \text{ع}) - \text{ب} \text{جم} (\text{ط} + \text{ع}) &= \text{لا} \text{جم} (\text{ف} + \text{ب}) - \text{ما} \text{جم} (\text{ف} - \text{ب}) \\ \text{ط} \pm \text{ف} &= \text{ج} \end{aligned}$$

سے ط، ف ساقط کرو۔

(۵۳) ثنابت کرو کہ

$$\begin{aligned} \text{ح} \text{جم} \text{ع} (\text{جم} ۳ - \text{جم} ۳) \\ ۴ = (\text{جم} ۲ - \text{جم} ۲) (\text{جم} ۲ - \text{جم} ۲) (\text{جم} ۲ - \text{جم} ۲) (\text{جم} ۲ - \text{جم} ۲) \\ \text{اگر} (۵۴) \text{ا} \text{جم} \text{ع} + \text{ب} \text{جم} \text{ب} + \text{ج} \text{جم} \text{ج} = ۰ \\ \text{ا} \text{جب} \text{ع} + \text{ب} \text{جب} \text{ب} + \text{ج} \text{جب} \text{ج} = ۰ \\ \text{ا} \text{قط} \text{ع} + \text{ب} \text{قط} \text{ب} + \text{ج} \text{قط} \text{ج} = ۰ \\ \text{تو ثنابت کرو کہ بالعموم} \text{ا} \pm \text{ب} \pm \text{ج} = ۰ \end{aligned}$$

(۵۵) مساواتوں

$$\begin{aligned} \text{جب} ۳ (\frac{1}{\pi} + \pi + \pi) + \text{جب} ۳ (\frac{1}{\pi} + \pi + \pi) &= ۲ \\ \text{جب} ۳ (\frac{1}{\pi} - \pi - \pi) + \text{جب} ۳ (\frac{1}{\pi} - \pi - \pi) &= ۲ \end{aligned}$$

سے ط ساقط کرو۔

(۵۶) اگر مساوات مس (ط + ع) = ک مس ۲ ط

کو پورا کر نیوالی ط کی قیمتیں ط، ط، ط ہوں اور ان میں سے کسی دو میں  $\pi$  کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثنابت کرو کہ

$$\pi \text{ کا ایک ضعف ہے۔} \quad \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} = \text{ع}$$





(۶۲) اگر مس ۲ ط = مس ۲ فہ = مس ۲ فہ = مس ۲ پ = مس ۲  
تو ثابت کرو کہ ط + فہ + پ =  $\pi$  کا ایک طاق ضعیف ہے بشرطیکہ مس ط  
مس فہ، مس پ سب غیر مساوی ہوں۔

اگر (۶۳) لا.جم عہ + ما.جب عہ + ی + جم ۲ عہ = ۰

لا.جم بہ + ما.جب بہ + ی + جم ۲ بہ = ۰

لا.جم جہ + ما.جب جہ + ی + جم ۲ جہ = ۰

تو ثابت کرو کہ

لا.جم فہ + ما.جب فہ + ی + جم ۲ فہ

= ۸ جب  $\frac{1}{2}$  (عہ + بہ + جہ + فہ) جب  $\frac{1}{2}$  (فہ - عہ) جب  $\frac{1}{2}$  (فہ - بہ) جب  $\frac{1}{2}$  (فہ - جہ)

(۶۴) مساواتوں

مس ط + مس فہ = ۱

قط ط + قط فہ = ب

قم ط + قم فہ = ج

سے ط اور فہ ساقط کر داور ثابت کرو کہ اگر ب اور ج ہم علامت ہوں تو

ب ج < ۱۲

(۶۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\frac{\text{جم}(\text{ط} - ۳ - \text{جہ})}{\text{جم} ۳ \text{ جہ}} = \frac{\text{جم}(\text{ط} - ۳ - \text{بہ})}{\text{جم} ۳ \text{ بہ}} = \frac{\text{جم}(\text{ط} - ۳ - \text{عہ})}{\text{جم} ۳ \text{ عہ}}$$

سے ط کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) {جم (عہ + بہ + جہ) - جم عہ} جم بہ جم جہ = ۰

(۶۶) اگر (۱ - لا + لا<sup>۲</sup>) کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ لا کا سر

جب  $\frac{1}{2}$  (۱ + ن)  $\pi$  جب  $\frac{1}{2}$   $\pi$  ہے -

(۶۷) ثابت کرو کہ ۳ جم ۴ عہ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ)

= ۸ - جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)









## ساتواں باب

### ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

#### جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ

۷۸۔ دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۲۰) میں اگر ہم جب ۱ کی بجائے اس کی قیمت (۱-جم<sup>۱</sup>) لکھیں اور سلسلہ کو ہم ۱ کی قوتوں میں ترتیب دیں تو ہم ۱ کے لیے صرف جم<sup>۱</sup> کی قوتوں میں ایک جملہ حاصل ہوگا۔  
۱ کی بجائے ط رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}^n \text{ ط} = \text{جم}^n \text{ ط} - \frac{n(n-1)}{2} \text{جم}^{n-2} \text{ ط} (1 - \text{جم}^2 \text{ ط}) + \dots$$

$$+ (1 - \text{جم}^2 \text{ ط}) \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{جم}^{n-4} \text{ ط} (1 - \text{جم}^2 \text{ ط}) + \dots$$

اسی سلسلے میں (۱-جم<sup>۲</sup> ط) کا مرتبہ

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} (1 - \text{جم}^2 \text{ ط}) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} (1 - \text{جم}^2 \text{ ط})^2 + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(2+1)(1+1)}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} (1 - \text{جم}^2 \text{ ط})^3 + \dots$$

یہ سیر (۱+لا<sup>۲</sup>) اور (۱-جم<sup>۲</sup> ط) کے حاصل ضرب میں لا<sup>۲</sup> کا جو

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے :  
اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو  $(1 + \frac{1}{r})^{n-1} - 1$  کا  $\frac{1}{r}$  ہے  $(1 + \frac{1}{r})^n$   
پھیلاؤ میں لا کا ہے۔ یہ آخری سر

$$+ (1 + \frac{1}{r})^{n-2} + \dots + 1 \} \frac{(1 + \frac{1}{r})^n - 1}{\frac{1}{r}} =$$

$$\{ \dots + (2 + \frac{1}{r}) \frac{(1 + \frac{1}{r})^{n-1} - 1}{\frac{1}{r}} \}$$

(10b)

اور یہ

$$\{ \frac{(1 + \frac{1}{r})^{n-1} - 1}{\frac{1}{r}} + \frac{(1 + \frac{1}{r})^{n-2} - 1}{\frac{1}{r}} \} \frac{(1 + \frac{1}{r})^n - 1}{\frac{1}{r}} =$$

$$\frac{n}{2} \frac{(1 + \frac{1}{r})^n - 1}{\frac{1}{r}} =$$

جَمْ ط کا سر  $\frac{1}{r} \{ (1 + \frac{1}{r})^n + (1 + \frac{1}{r})^{n-1} \}$  یعنی  $\frac{1}{r}$  حاصل ہوتا ہے۔ جَمْ ط  $\frac{1}{r}$

کا سر  $(1 + \frac{1}{r})^{n-1} - 1$  کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں  
لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے  $(1 + \frac{1}{r})^{n-2} + (1 + \frac{1}{r})^{n-3} + \dots$  یا

$\frac{n}{2} \times \frac{1}{r}$   
پس

$$\text{جَمْ ن ط} = \frac{1}{r} \{ (1 + \frac{1}{r})^n + (1 + \frac{1}{r})^{n-1} \} + \frac{n}{2} \times \frac{1}{r} = \frac{(1 + \frac{1}{r})^{n+1} - 1}{\frac{1}{r}} \dots (1)$$

اس کی عام رقم ہے

$$(1 + \frac{1}{r})^n \frac{n}{2} \times \frac{1}{r} + \frac{(1 + \frac{1}{r})^{n+1} - 1}{\frac{1}{r}}$$





جبکہ ن طاق ہو۔

## جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰۔ جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم ان چھ سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُٹنی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (1 - \text{جب}^2 \text{ط}) - \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (1 - \text{جب}^2 \text{ط})}{2} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (1 - \text{جب}^2 \text{ط})}{6} - \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3) (1 - \text{جب}^2 \text{ط})}{24} - \dots$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱۔ جب ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = 1 - \left\{ \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1)}{2} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2)}{6} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3)}{24} + \dots \right\} (1 - \text{جب}^2 \text{ط})$$

$$+ \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3) (\text{ن} - 4)}{120} - \dots$$

اس پھیلاؤ میں (۱۔) جب ط کا سر ہے

$$\frac{1}{2} \text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3) (\text{ن} - 4) (\text{ن} - 5) + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3) (\text{ن} - 4) (\text{ن} - 5) (\text{ن} - 6)}{720} - \dots$$

$$+ \frac{\text{ن} (\text{ن} - 1) (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 3) (\text{ن} - 4) (\text{ن} - 5) (\text{ن} - 6) (\text{ن} - 7)}{30240} - \dots$$

جس شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2n+1)}{(1-s)^2 \dots x^2 x^3 x^4 \dots} \left[ \frac{(1-s^2)}{2} \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \right] +$$

$$s + \frac{(1-s)}{2} \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \left( \frac{1-s^2}{2} \right) +$$

$$s + \frac{(1-s)}{2} \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \left( \frac{1-s^2}{2} \right) +$$

$$\dots +$$

اب وانڈر مانڈ کا مسئلہ ہے

(107)

$$(f+q) = f + s + f + \frac{s(1-s)}{2} + f + \dots$$

جس میں  $f$ ،  $f(1-s)$ ،  $\dots$ ،  $(f-s)$  کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ مسئلہ  $f$  اور  $q$  کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ  $f = \frac{1-s^2}{2}$ ،

$q = \frac{1-s}{2}$ ، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ  $(1-s)$  جب  $s^2$  کا سر ہے

$$\frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-2n+1)}{(1-s)^2 \dots x^2 x^3 x^4 \dots} \left[ \frac{(1-s^2)}{2} \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \dots \left( \frac{1-s^2}{2} \right) \right] +$$

$$\frac{n^2 (n-1) (n-2) \dots (n-2n+1)}{s^2}$$

۱۷ دیکھو آئندہ کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرشل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب،  $n$  جفت ہو تو

$$\text{جم } n ط = 1 - \frac{n}{2} \text{ جب } ط + \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } ط + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1}$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے۔

۸۱۔ نیز

$$\text{جب } n ط = \text{جم } ط (1 - \frac{n}{2} \text{ جب } ط - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1}$$

فرض کرو کہ  $n$  جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب ط کی قوتوں میں پھیلاؤ تو ہمیں

$$(-1)^{n-1} \text{ جم } ط \text{ جب } ط - 1 ط کا سر ملتا ہے}$$

$$\frac{1}{(1-s)} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{(1-s^2) \dots 2 \times 4 \times 2 \times 1} + \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots + \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots$$

$$\{ \dots + \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots + \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \frac{(1-s^2)}{(1-s)} \dots$$

جو

$$= \frac{1}{(1-s)} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{(1-s^2) \dots 2 \times 4 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{(1-s)} =$$

$$= \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{(1-s^2) \dots 2 \times 4 \times 2 \times 1} =$$

(108)

پس  $n$  جفت ہونے کی صورت میں

$$\text{جب } n ط = \text{جم } ط - \frac{n}{2} \text{ جب } ط - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n(n-2) \dots (2-s^2-n)}{2} \text{ جب } ط + \dots + (-1)^{n-1}$$

۸۲۔ جب، ن طاق ہو تو

$$\text{جم } n ط = \text{جم } ط \{ (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) - \frac{1}{2} (n-1) (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) \}$$

$$+ \dots + \{$$

$$\text{اور جب } n ط = n (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) \text{ جب } ط$$

$$- \frac{n (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1) (1 - \text{جب } ط) \frac{1}{2} (n-1)}{2} + \dots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب ط کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } n ط \setminus \text{جم } ط = 1 - \frac{n-2}{2} \text{ جب } ط + \frac{(n-2)(n-4)}{2} \text{ جب } ط - \dots$$

$$+ \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{2 \cdot 4} \text{ جب } ط + \dots$$

$$(9) \dots +$$

$$\text{اور جب } n ط = \frac{n}{2} \text{ جب } ط - \frac{n(n-2)}{2} \text{ جب } ط + \frac{n(n-2)(n-4)}{2 \cdot 4} \text{ جب } ط$$

$$- \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{ جب } ط + \dots$$

۸۳۔ اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں ط کو  $\frac{1}{2} \pi$  ط سے بدل دیا جائے تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(1) \frac{1}{2} \text{ جم } n ط = 1 - \frac{n}{2} \text{ جم } ط + \frac{n(n-2)}{2} \text{ جم } ط$$

$$- \frac{n(n-2)(n-4)}{2} \text{ جم } ط + \dots (11)$$





اس لیے اُس صورت میں صرف ن قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب ط دیا گیا ہے، تب  $\frac{1}{2}$  حجم معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے؛ اس مساوات سے  $\frac{1}{2}$  کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا مربع لینا اور جب  $\frac{1}{2}$  کی بجائے  $1 - \frac{1}{2}$  رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ حجم  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  کی ۲ قیمتیں ہیں؛ اس طرح ۲ درجہ کی ایک مساوات سے حجم  $\frac{1}{2}$ ، جب ط کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب ط دیا گیا ہے، تب جب طے معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہے۔ اگر ن جفت ہے تو (۴) سے حاصل کردہ مساوات سے جب طے کی ۲ ن قیمتیں ملتی ہیں یہ قیمتیں جب  $\frac{n}{2} + \pi$  (۱-۱) سے کم کی ۲ ن قیمتیں ہونگی۔ اگر ن طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب طے کی ۲ ن قیمتیں ملینگی جو جب  $\frac{n}{2} + \pi$  (۱-۱) سے کم کی ن مختلف قیمتیں ہونگی۔

مساداتوں کی اصلوں کے تشاکل تفساعل

۸۵۔ ضابطہ (۱) کو جم ط میں ن دیں درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ جم ن ط دیا گیا ہو۔ اب چونکہ ن زاویوں ط، ط +  $\frac{\pi}{2}$ ، ط +  $\frac{3\pi}{2}$  .....  
ط +  $\frac{(n-1)\pi}{2}$  میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے ن گھٹنے کی جیب اتمام  
جم ن ط کے مساوی ہے اور چونکہ جم ط، جم (ط +  $\frac{\pi}{2}$ )، جم (ط +  $\frac{3\pi}{2}$ )، .....  
جم {ط +  $\frac{(n-1)\pi}{2}$ } سب کے سب مختلف ہیں، وہ جم ط کی مساوات



کی اصلیں ہیں؛ اب ہم  $n$  جیب تمام جم  $(\pi + \frac{\pi}{n})$  (جور  $= 2, 4, 6, \dots, n-1$ )  
 رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں، کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے کیلئے وہ معمولی  
 مسئلے استعمال کر سکتے ہیں جو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلات محسوب  
 کرنے میں استعمال ہوئے تھے۔ اگر ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) کے استعمال کرنے میں  
 سہولت ہو تو ہم انہیں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ وہ (۱) کے مماثل ہیں۔  
 نیز مساوات (۲)،  $n$  (۱- $n$ ) زاویوں کی جیب تمام کے متشاکل تفاعلات  
 محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن کے لیے جب  $n$  طہ جب طہ کی  
 قیمت دی ہوئی ہو۔

اسی طرح مساوات (۳)  $2$  م جیب

جب طہ، جب  $(\pi + \frac{\pi}{m})$ ، جب  $(\pi + \frac{\pi}{2})$ ، ...، جب  $(\pi + \frac{\pi}{m^2})$   
 کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جبکہ  $n = 2$  م۔  
 اسی طرح مسئلہ (۵)  $1 + m^2$  جیب

جب طہ، جب  $(\pi + \frac{\pi}{m^2})$ ، جب  $(\pi + \frac{\pi}{1+m^2})$ ، ...، جب  $(\pi + \frac{\pi}{m^2})$   
 کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ  $n = 1 + m^2$ ۔  
 مساوات

$$\left\{ m^n \pi - \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3-n)}{n} \pi + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3-n)}{n} \pi \right\} \\ = n \pi - \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3-n)}{n} \pi + \dots$$

کو مس طہ کی مساوات سمجھا جا سکتا ہے جس کی اصلیں ہیں

مس طہ، مس  $(\pi + \frac{\pi}{n})$ ، مس  $(\pi + \frac{\pi}{2})$ ، ...، مس  $(\pi + \frac{\pi}{n})$   
 اور اس لیے اس کو  $n$  جیبوں کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(112)

## امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$\frac{\pi(1-n)^2}{n} + ط^۲, \dots, \frac{\pi^2}{n} + ط^۲$$

میں سے دو دو کے قاطع التماموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ -  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} ط$  ہے جہاں  $n$  ایک جفت عدد ہے۔

مسادات (۲) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے  $n-2$  زاویوں کی جیب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ان سب زاویوں کی جیب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قیمت مطلوبہ مجموعہ ہے؟ یہ حاصل قیمت جب  $ط$  کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اس رقم سے تقسیم کیا جائے جس میں جب  $ط$  شامل نہیں ہوتا یعنی

$$\frac{n}{(1-n)^2} = \text{مطلوبہ مجموعہ}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} ط}$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\frac{19}{14} = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{اور } 1120 = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

اگر جب  $ط$  جب  $ط$  کو  $ط$  کی رقم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اس آٹھویں درجہ کی مسادات کو حل کرنے سے  $ط$  کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \dots, \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\dots \pi \frac{1}{4} \pi - \pi \frac{1}{4} \pi - \pi \frac{1}{4} \pi - \pi \frac{1}{4} \pi$$

اس لیے مساوات متذکرہ بالا کی اصلیں ہیں

$$\pi \frac{1}{4} \text{م.} \pm \pi \frac{1}{4} \text{م.} = \pi \frac{1}{4} \text{م.} \pm \pi \frac{1}{4} \text{م.} \pm$$

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :-

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

جب ۵ ط. جم ۲ ط. + جم ۵ ط. جب ۲ ط. = .

1

$$(جیب ۳ ط ۲ . جم ۳ ط ۲ + جم ۳ ط ۲ جب ۲ ط) (۲ جم ۲ ط - ۱)$$

+) (م ۳ ط ۳ جم ۲ ط - جب ۳ ط جب ۲ ط) ۲ جب ۲ ط جم ۲ ط =

جب ۳ طہ، جم ۲ طہ، وغیرہ کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرو اور جزو ضرعی جب طہ کو خارج

کرد اور فرض کرو کہ لا = حجم<sup>۲</sup> طول میں حسب ذیل چار درجی مساوات حاصل ہوگی

$$\{(u-v)(1-u)r\} + \{1-(1-u)r\} \{(u-v)r + (1-u)(1-v)\}$$

$$\bullet = (1-u^2) \{ u(u-1)(1-u^2)^{n-1} -$$

$$= (1 - \nu_r)(\nu_r + \nu_a - \nu_q \nu) + (1 + \nu_a - \nu_a)(1 + \nu_{12} - \nu_{14}) \quad 6$$

یا لاکھ قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

$$= 1 + 2r - 2r^2 + 2r^3 - 2r^4$$

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع  $\frac{229}{109}$  ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضرب کا

مجموع  $\frac{220}{259}$  ہے، اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ  $\frac{259 \times 220 \times 2 - 220^2}{2(259)} =$

$\frac{19}{14} =$  نیز اصولوں کے متکافوں کے مربعوں کا مجموعہ  $= 20 = 22 \times 2 - 112$   
 (۳) ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \text{جیب } ۴۵^\circ + \text{جیب } ۴۵^\circ + \text{جیب } ۴۵^\circ$$

$$\text{جہاں } \frac{2}{3} = \pi -$$

ہم دیکھتے ہیں کہ (جب ۲ء + جب ۲ء + جب ۲ء) = جب ۲ء + جب ۲ء + جب ۲ء  
اگر جب ۲ء ط / جب ط کو جب ط کی رقوم میں پھیلایا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی  
رکھا جائے تو جب ط کی مساوات کی اصنیں ہونگی

$$\pm \text{جب } ۲ء \pm \text{جب } ۲ء \pm \text{جب } ۲ء$$

لکھو لا = جب ۲ء ط تو لا میں مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۰ = ۶۳ - لا ۱۱۲ + لا ۵۶ - ۷۰$$

$$\text{اس لیے } \frac{۱۱۲}{۶۳} = \text{جب } ۲ء + \text{جب } ۲ء + \text{جب } ۲ء$$

$$\text{اس لیے } \frac{۱}{۲۶} = \text{جب } ۲ء + \text{جب } ۲ء + \text{جب } ۲ء$$

(۲) جب  $\frac{112}{63}$  کی قیمت معلوم کر دو۔

لکھو ۲ء =  $\frac{112}{63}$  تو اس ضابطہ سے جو زاویوں کی جیوب التمام کے  
مجموعہ کے لیے ہے جبکہ زاویے سلسلہ حسابہ میں ہوں ہم معلوم کرتے ہیں۔

$$(\text{جم } ۲ء + \text{جم } ۹ء + \text{جم } ۱۳ء + \text{جم } ۱۵ء) + (\text{جم } ۲ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۱۱ء) = \frac{1}{4}$$

نیز (جم ۲ء + جم ۹ء + جم ۱۳ء + جم ۱۵ء) اور (جم ۲ء + جم ۵ء + جم ۵ء + جم ۵ء + جم ۱۱ء) کو باہم  
ضرب دینے اور ہر دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کی بجائے ان دو جیوب التمام کے مجموعہ کا  
نصف رکھنے سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$(\text{جم } ۲ء + \text{جم } ۹ء + \text{جم } ۱۳ء + \text{جم } ۱۵ء) (\text{جم } ۲ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۱۱ء) = ۱$$

پس خطوط وحدانی کے اندر کی دو مقادیر دو درجی مساوات ی +  $\frac{1}{4}$  ی - ۱ = ۰ کی اصنیں  
ہیں، لیکن اس مساوات کی اصنیں  $\frac{1}{4}$  (-۱ یا ۱) ہیں۔ اب یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جم } ۲ء + \text{جم } ۹ء + \text{جم } ۱۳ء + \text{جم } ۱۵ء \text{ مثبت ہے اور جم } ۲ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۱۱ء$$

ضعفی ہے۔ اس لیے

$$\frac{1}{4} = \text{جم } ۲ء + \text{جم } ۹ء + \text{جم } ۱۳ء + \text{جم } ۱۵ء$$

$$\frac{1}{4} - ۱ = \text{جم } ۲ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۱۱ء$$

$$\frac{1}{4} - ۱ = \text{جم } ۲ء + \text{جم } ۵ء + \text{جم } ۱۱ء$$

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ (جم ۲ء + جم ۱۳ء) (جم ۹ء + جم ۱۵ء) =  $\frac{1}{4}$

اس لیے  $\text{جم } \epsilon + \text{جم } ۱۳\epsilon + \text{جم } ۹\epsilon + \text{جم } ۵\epsilon$  اس دو درجی مساوات

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{p}}) - \frac{1}{q} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ پس

$$\text{جم } \epsilon + \text{جم } ۱۳\epsilon = \frac{1}{p} (-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p}} + \sqrt{1 - \frac{1}{q}})$$

اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{جم } ۳\epsilon + \text{جم } ۵\epsilon = \frac{1}{p} (-1 - \sqrt{1 - \frac{1}{p}} + \sqrt{1 - \frac{1}{q}})$$

اب  $\text{جم } \epsilon + \text{جم } ۱۳\epsilon = \frac{1}{p} (\text{جم } ۱۲\epsilon + \text{جم } ۱۲\epsilon) = \frac{1}{p} (\text{جم } ۳\epsilon + \text{جم } ۵\epsilon)$  اور

چونکہ ہم نے  $\text{جم } \epsilon + \text{جم } ۱۳\epsilon$  کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کر لیا ہے اس لیے ہم ان میں سے ہر ایک کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ  $\text{جم } \epsilon < \text{جم } ۱۳\epsilon$  ہیں حال ہوتا ہے

$$\text{جم } \epsilon = \frac{1}{p} \{ \sqrt{1 - \frac{1}{p}} - 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{q}} + \sqrt{1 - \frac{1}{q}} - \sqrt{1 - \frac{1}{p}} - \sqrt{1 - \frac{1}{q}} + \sqrt{1 - \frac{1}{p}} + \sqrt{1 - \frac{1}{q}} \}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{p}{q} = \frac{1}{p} (1 - \text{جم } \epsilon)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{p}} - \sqrt{1 - \frac{1}{q}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{p}} + \sqrt{1 - \frac{1}{q}}}$$

(۵) ثابت کرو کہ اگر  $(\lambda, \mu)$  ایک متجانس تغاٹ ہوگا، ماکا جس کے ابعاد  $n$  ہیں تو

ف (جب  $\lambda, \mu$  جم  $\epsilon$ )

$$\frac{\text{جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu)}{\text{جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu)}$$

ف (جب  $\epsilon, \text{جم } \epsilon$ )

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\text{جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu)}{\text{جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu) \text{ جب } (\lambda - \mu)}$$

ہر شے اس کے ساتھ ہوتی ہے Sur l'Integration des Fonctions circulaires میں بیان کیا ہے

۱۸۶۲ء میں شائع ہوا تھا۔

Proc. Lond. math. Soc.

۳



اس میں جم ط کی اعلیٰ ترین قوت  $\frac{1}{2} \pi$  جم ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ  $\frac{1}{2} \pi = 1$ ؛  
اس لیے

$$\text{جم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2})$$

اب جم  $\frac{\pi}{2} = \text{جم} \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\pi}{2})$ ، اس لیے یہ جملہ کھسا جاسکتا ہے

$$\text{جم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2})$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جم ط} - \text{جم} \frac{\pi}{2}) \quad (115)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جاسکتے ہیں

$$\text{جم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2}) (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2})$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \frac{1}{2} \pi (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2}) (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جب ط} - \text{جب} \frac{\pi}{2})$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = . رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \pi (1 - \frac{\pi}{2}) \text{ جب} \frac{\pi}{2} \dots \text{جب} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} = 1 \\ \frac{1}{2} \pi (1 - \frac{\pi}{2}) \text{ جب} \frac{\pi}{2} \dots \text{جب} \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right. \quad (15) \dots$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

جبکہ ن جفت ہو۔

جذر المربع نکالنے میں مثبت علامت لیکٹی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حادہ ہیں۔  
 جم ن ط + جم ط یا جم ن ط کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کو اگر جم  
 (۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے متناظر حاصل ضرب کا مربع لیکر اس  
 سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi}) (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}) \dots (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi(1-n)}) \dots (16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi}) (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi^2}) \dots (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi(1-n)}) \dots (17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم ان مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :-

(116)

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n}{2}} (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi(1-r^2)}) \dots (18)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - \frac{\text{جب ط}^2}{\pi(1-r^2)}) \dots (19)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

۸۷ — دفعہ ماضی کی طرح چونکہ جب ن ط \text{جب ط} ، جم ط  
 میں ن - ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک



متناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جاسکتا ہے جو (اجزائے ضربی) حجم ط میں خطی ہوں، اس صورت میں

حجم  $\frac{\pi}{n}$ ، حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ، ...، حجم  $\frac{\pi(1-n)}{n}$   
حجم ط کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب ن ط جب ط صفر کے مساوی ہے۔ یہ قیمتیں لکھی جاسکتی ہیں:

پس حسب سابق  $\pm$  حجم  $\frac{\pi}{n}$ ،  $\pm$  حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ، ...

جب ن ط جب ط =  $\frac{\pi^3}{n}$  (حجم ط - حجم  $\frac{\pi}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ) ... (حجم ط - حجم  $\frac{\pi(1-n)}{n}$ )  
جبکہ ن جفت ہو، اور

جب ن ط جب ط =  $\frac{\pi^3}{n}$  (حجم ط - حجم  $\frac{\pi}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ) ... (حجم ط - حجم  $\frac{\pi(1-n)}{n}$ )  
جبکہ ن طاق ہو۔

ان جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں:۔

جب ن ط جب ط =  $\frac{\pi^3}{n}$  (حجم ط - حجم  $\frac{\pi}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi(1-n)}{n}$ )  
جبکہ ن جفت ہو، اور

جب ن ط جب ط =  $\frac{\pi^3}{n}$  (حجم ط - حجم  $\frac{\pi}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi^2}{n}$ ) (حجم ط - حجم  $\frac{\pi(1-n)}{n}$ )  
جبکہ ن طاق ہو۔

آئندہ باب میں ہم یہ دکھائیں گے کہ جب ن ط کی انتہاں ہے جبکہ ط لا انتہا پھوٹا ہو، پس

ان  $\frac{\pi^3}{n^2}$  جب  $\frac{\pi}{n}$  جب  $\frac{\pi^2}{n}$ ، ...، ... (۱۸)

بائیں جانب آخری جزو ضربی جب  $\frac{\pi(1-n)}{n}$  یا جب  $\frac{\pi(1-n)}{n^2}$  ہے بموجب  
اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق ہیں

$$(19) \dots \left( \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\frac{\pi}{n} \text{جب}^2} - 1 \right)^{\frac{1}{n} = 1} \prod_{i=1}^{n-1} \text{جب} \text{ن} \text{ط} = \text{جم} \text{ط} \quad \text{جبکہ ن جفت ہو، اور}$$

$$(20) \dots \left( \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\frac{\pi}{n} \text{جب}^2} - 1 \right)^{\frac{1}{n} = 1} \prod_{i=1}^{n-1} \text{جب} \text{ن} \text{ط} = \text{جم} \text{ط} \quad \text{جبکہ ن طاق ہو۔}$$

۸۸۔۔۔۔۔ جملہ جم ن ط۔ جم ن ذ کو جم ط کان دیں درجہ کا ایک جبری تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے اور اس لیے اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے؟ جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا ہے یہ ہیں

جم ذ ۱، جم (ذ +  $\frac{\pi}{n}$ )، جم (ذ +  $\frac{2\pi}{n}$ )، ..... اس لیے

$$\text{جم ن ط} - \text{جم ن ذ} = \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \text{جم ط} - \text{جم} \left( \text{ذ} + \frac{i\pi}{n} \right) \right\}$$

(۲۱).....

۸۹۔۔۔۔۔ اب ہم جملہ  $\text{لا}^2 - \text{لا}^2$  جم ن ط + کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$\text{لا}^2 - \text{جم ن ط} + \text{لا}^2 = (\text{لا}^2 + \text{لا}^2) - (\text{جم ن ط} + \text{لا}^2)$$

$$+ \text{جم ط} - (\text{لا}^2 - \text{جم} (1-n) \text{ط} + \text{لا}^2)$$

$$- (\text{لا}^2 - \text{جم} (2-n) \text{ط} + \text{لا}^2)$$

لے فریز (Towers) نے یہ طریقہ مسجرف آف میٹھینک کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم  $\lambda$  -  $2$  جم  $n$  ط +  $\lambda$  کو  $n$  سے تعبیر کریں تو ہم اس متناظر کو لکھ سکتے ہیں

$$n = (\lambda^{1-n} + \lambda^{1+n}) + 2 + 1 - 2 - n - 2$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ  $n$ ،  $n$  سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ  $n$  اور  $n$  -  $2$  سے تقسیم پذیر ہوں۔

$$ab = (2 - \lambda) \cdot 2 + (\lambda + 2) \cdot 2 + \lambda$$

اس لیے  $n$ ،  $n$  سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے  $n$  بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ القیاس

پس  $n$ ،  $n$  سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے  $\lambda$  -  $2$  جم  $n$  ط +  $\lambda$  کا ایک جزو ضربی  $\lambda$  -  $2$  لا جم  $n$  ط +  $\lambda$  ہے؛ اب چونکہ جم  $n$  ط کو بدلے بغیر ط کو

(118)

ط +  $\frac{n^2}{n}$  میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\lambda - 2 \text{ لا جم } (ط + \frac{n^2}{n}) + 1$$

دبے ہوئے جملہ کا ایک جزو ضربی ہے جبکہ کوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں  $n = 1, 2, \dots$  - تو ہمیں دیے ہوئے جملہ کے مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں؛ پس

$$\lambda - 2 \text{ لا جم } n ط + 1 = \prod_{j=1}^{n-1} \left( \lambda - 2 \text{ لا جم } (ط + \frac{n^2}{n}) + 1 \right) \dots (22)$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\lambda - 2 \text{ لا جم } n ط + 1 = \prod_{j=1}^{n-1} \left( \lambda - 2 \text{ لا جم } (ط + \frac{n^2}{n}) + 1 \right) \dots (23)$$

۹۔ مساوات (۲۲) میں رکھو ط = ۰ تو

$$(1 - \lambda) \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda - 2 \text{ لا جم } \frac{n^2}{n} + 1) = 0$$

اور چونکہ  $\text{جم} = \frac{\pi r^2}{n}$   $\frac{\pi (n-1)^2}{n}$  اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں، لہٰذا آئندہ جب 'ن جفت' ہو تو ایک واحد جزو ضربی  $\lambda^2 + \lambda + 1$  ہے، اور خواہ 'ن جفت' ہو یا طاق بہر صورت جزو ضربی  $\lambda^2 - \lambda + 1$  ہے؟ اس لیے

$$\lambda^2 - 1 = \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \lambda^r) \quad \frac{1}{r} = \frac{(n-1)^2}{n} \quad (23) \dots (1 + \frac{\pi r^2}{n} \text{جم} \lambda^2 - \lambda^2) \dots$$

جبکہ 'ن جفت' ہو، اور

$$\lambda^2 - 1 = \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \lambda^r) \quad \frac{1}{r} = \frac{(n-1)^2}{n} \quad (24) \dots (1 + \frac{\pi r^2}{n} \text{جم} \lambda^2 - \lambda^2) \dots$$

جبکہ 'ن طاق' ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں  $\frac{\pi}{n} = \text{ط}$  رکھنے سے

$$\left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \lambda^2 - \lambda^2 \right\}^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \lambda^2$$

$$\text{لیکن} \quad \text{جم} = \frac{\pi (1+r^2)}{n} = \frac{\pi (n-1)^2}{n}$$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں، لہٰذا آئندہ جب 'ن طاق' ہو تو واحد جزو ضربی  $\lambda^2 + \lambda + 1$  ہے؟ پس

$$\lambda^2 + 1 = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \lambda^2 - \lambda^2 \right\}^{\frac{1-n}{2}} \quad (25) \dots$$

جبکہ 'ن جفت' ہو، اور

$$\lambda^2 + 1 = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\pi (1+r^2)}{n} \text{جم} \lambda^2 - \lambda^2 \right\}^{\frac{1-n}{2}} \quad (26) \dots (119)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۹۔ مساوات (۲۲) میں رکھو لا = ۱ تو

$$۱۔ \text{جم} \text{ن ط} = ۲^{۱-۰} \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰} \left\{ ۱۔ \text{جم} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \right\} ;$$

ط کو ۲ ط میں تبدیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب} \text{ن ط} = ۲^{۱-۰} \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰} \text{جب} \text{ط} \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \dots \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰})$$

$$\text{یا} \text{جب} \text{ن ط} = ۲^{۱-۰} \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰} \text{جب} \text{ط} \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \dots \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰})$$

جس میں ہم علامت اب تک غیر معین ہے۔ دفعہ ۱۵ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ جب ط اور جم ط کی رقوم میں جب ن ط کے پھیلاؤ کی شکل معین ہے، اس لیے بائیں جانب کے حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ ایک ہی رہے؛ اب رکھو ط =  $\frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}$  تو صریحاً علامت جو لیجانی چاہیے مثبت ہے کیونکہ ہر جزو ضربی مثبت ہے۔  
اس لیے

$$\text{جب} \text{ن ط} = ۲^{۱-۰} \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰} \text{جب} \text{ط} \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \dots \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰})$$

(۲۸) ....

(اگر ۲۸ میں ط کو ط +  $\frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}$  سے بدل دیا جائے تو

$$\text{جم} \text{ن ط} = ۲^{۱-۰} \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰} \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰}) \dots \text{جب} (\text{ط} + \frac{\pi}{\pi} \frac{۱-۰}{۱-۰})$$

(۲۹) ....

مسئلہ (۲۸) میں ط = رکھنے اور جذر المربع لینے سے مسئلہ (۱۸) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲۹) سے مسئلہ (۱۵) اخذ کیا جاسکتا ہے۔

## امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق صحیح عدد ہو تو جب  $n ط + جم ن ط$

جب  $ط + جم ط$  سے، ورنہ جب  $ط - جم ط$  سے

تقسیم پذیر ہے۔

فرض کرو

$$= جب ن ط + جم ن ط$$

تب

پس اگر  $ن$ ،  $جم ط + جب ط$  سے یا  $جم ط - جب ط$  سے تقسیم پذیر ہے تو  $ن$  بھی اسی مقدار سے تقسیم پذیر ہے۔ اب  $ع = جب ط + جم ط$ ، اس لیے  $ع، ۴ع، ۹ع، ۱۶ع، ...$  سب کے سب  $جب ط + جم ط$  سے تقسیم پذیر ہیں، نیز  $ع = جم ط - جب ط$ ۔ اس لیے  $ع، ۴ع، ۹ع، ۱۶ع، ...$  سب کے سب  $جم ط - جب ط$  سے تقسیم پذیر ہیں۔

(۲) مس  $n ط - مس ن ع$  کے اجزائے ضربی دریافت کرو۔

$$\frac{جب ن (ط - ع)}{جم ن ط جم ن ع} = مس ن ط - مس ن ع$$

(120)

مضابط (۲۸) میں  $ط$  کی بجائے  $ع - ط$  رکھو تو

$$جب ن (ط - ع) = (1 - \frac{ع}{ط}) \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط}) = (1 - \frac{ع}{ط}) \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط})$$

$$= (1 - \frac{ع}{ط}) \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط}) \cdot جم ن ط = (1 - \frac{ع}{ط}) \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط}) \cdot (مس ط مس + \frac{ع}{ط})$$

$$= (1 - \frac{ع}{ط}) \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط}) \cdot (مس ط - مس + \frac{ع}{ط})$$

نیز (۱۶) اور (۱۷) سے

$$جم ن ط = جم ط \prod_{r=1}^{n-1} (1 - \frac{ع}{ط}) \cdot (1 - \frac{ع}{ط}) \cdot (1 - \frac{ع}{ط})$$

بحر جیب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔ اب ۱۔ جیب ط = جیب ط (۱۔ مس ط) اس لیے  
جمن ط کا جہز لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جمن ط} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) \text{ یا } \text{جمن ط} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right)$$

اس لیے یہیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ل ط} - \text{مس ن ط} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) \text{ جب ن } \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right)$$

نسب نامی حاصل ضرب  $r = \frac{1}{\pi} \text{ یا } r = \frac{1}{\pi} (1 - 1)$  تک لینا چاہیے بحر جیب اس کے کہ  
ن جفت ہو یا طاق۔

## ساتویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور  $e = \frac{\pi}{2}$  تو

$$\text{مس ن ف} = \frac{1}{r} (1 - 1) \text{ مس ف مس (ف + ع) ... مس (ف + ن - 1 ع)}$$

اور  $\text{ن مس ن ف} = \text{مس ف} + \text{مس (ف + ع)} + \dots + \text{مس (ف + ن - 1 ع)}$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جیب ط} - \text{جیب ط}}{\text{جیب ط} + \text{جیب ط}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right)$$

۳۔ ثابت کرو کہ

نم ن م = نم م + مم (م + م) + ... + مم (م + م) + م (م + م)  
جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(121)

۴- اگر  $\frac{P}{P_0} = 1$  تو ثابت کرو کہ

$$(\frac{1}{13} + 1) \frac{1}{p} = \text{جم ۱} + \text{جم ۲} + \text{جم ۳}$$

اور  $\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{k}$  (۱-۳) ثابت کرو کہ

$$(-\frac{1}{r}) = \frac{\pi^2}{10} \text{م} \dots \frac{\pi^2}{10} \text{م} \cdot \frac{\pi^2}{10} \text{م} \cdot \frac{\pi^2}{10} \text{م}$$

۶۔ غایت کر دو کہ

$$\frac{1}{p} = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 + \frac{\pi^2}{2} \int_1^{\infty} + \frac{\pi^2}{2} \int_{-\infty}^{-1}$$

دوم کجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{\pi^A}{2} \text{ } \mu, \quad \frac{\pi^B}{2} \text{ } \mu, \quad \frac{\pi^C}{2} \text{ } \mu,$$

۷۔ ثبات کرو کہ مساوات۔

$$= F_1 + v_2 - v F_{1,2} - v$$

کی اصلیں مس ۹۰، مس ۸۰، مس ۷۰ ہیں۔

## ۸۔ ثابت کرو کہ

جیب ۷ + جیب ۳ = جیب ۱۰  
جیب ۶ + جیب ۴ = جیب ۱۰  
جیب ۵ + جیب ۵ = جیب ۱۰

$$\frac{II}{E} = 0.0001$$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{n} \text{ ائب فجب } (f + \frac{\pi^2}{n^2}) \text{ جب } (f + \frac{\pi^2}{n^2}) \dots \text{ جب } (f + \frac{\pi^2}{n^2})$$

$$= \text{مجم } \frac{\pi}{4} - \text{مجم } n \left( \frac{\pi}{4} + \phi \right)$$



## ۱۰۔ ثابت کرو کہ

$\dots + \left( \mu - \frac{\pi_2}{\omega_2} \right) \mu + \left( \mu + \frac{\pi_2}{\omega_2} \right) \mu + \left( \mu - \frac{\pi_2}{\omega_2} \right) \mu + \mu$   
 $\omega_2$  ارقام تک =  $\omega_2$  قم  $\omega_2$

۱۱۔ ثابت کر دو

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} + \dots + \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha_n^2}}$$

جہاں ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۲۔ نمائندگی کرو کہ

$$\frac{(\pi \frac{1-\omega}{\omega^2})^2}{\pi \frac{1-\omega}{1-\omega^2}} \times \dots \times \frac{\pi^2}{\pi \frac{1-\omega}{1-\omega^2}} \times \frac{\pi^2}{\pi \frac{1-\omega}{1-\omega^2}} = \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

جہاں نہ کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۳۔ ثبات کرو کہ

$$\frac{\text{جیب } \theta \text{ جیب } \phi}{\text{جیب } \theta \text{ جیب } \phi} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \text{جیب } (\theta - \phi) - \text{جیب } (\theta + \phi) + \left( \frac{\pi^2}{4} + \theta + \phi \right) \right] \left\{ \text{جیب } (\theta - \phi) - \text{جیب } (\theta + \phi) + \left( \frac{\pi^2}{4} + \theta + \phi \right) \right\} \dots \dots \dots \left\{ \left( \frac{\pi^2}{4} + \theta + \phi \right) \right\} \right.$$

بائیں جانب اجزائے ضربی کی تعداد ن - ہے ۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ م جب ن ط۔ ن جب م ط، جب ط سے تقسیم پذیر ہے اگر م اور ن طاق  
صحیح عدد ہوں۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر  $m$  ایک مثبت صحیح عدد ہو تو  $2^m + 2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2^1 + 2^0$  کی قیمتوں کے ایک سلسلہ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ 
$$n = \frac{\text{جب } ۲۲ \text{ جب } ۲۲ \dots \text{ جب } (۲-n)}{\text{جب } ۲ \text{ جب } ۳ \dots \text{ جب } (۱-n)}$$

$\frac{12}{12} = 1$  جہاں =



$$13 = 13 \quad \text{جب } 2 \text{ جب } 2 \times \dots \times \text{جب } 13$$

$$\text{اور } \frac{1}{p} = \text{جم } 2 + \text{جم } 4 + \text{جم } 8 + \dots$$

$$23 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{\pi}{n} \text{ مس } \frac{\pi^2}{n^2} \times \dots \times \frac{\pi^{n-1}}{n^{n-1}} \text{ مس } \frac{1-n}{n} \pi = 1$$

یہاں  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$24 - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{قم لا + قم (لا + } \frac{\pi^2}{n} \text{) + } \dots \text{ + قم (لا + } \frac{\pi(1-n)^2}{n} \text{)}$$

$$= n \{ \text{قم (لا + قم (ن + لا + } \pi \text{) + } \dots \text{ + قم (ن + لا + } \pi \text{) } \}$$

$$25 - \text{ثابت کرو کہ} \quad (123)$$

$$2(1 + \text{جم } n \text{ ط}) \text{ یا } \frac{(1 + \text{جم } n \text{ ط})}{\text{جم } 0 + 1}$$

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تعامل کا مربع ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ دکھاؤ

$$1 + \text{جم } 9 \text{ ط} = (1 + \text{جم } 8 \text{ ط})(1 + \text{جم } 1 \text{ ط}) - \text{جم } 8 \text{ ط} - \text{جم } 1 \text{ ط} + \text{جم } 2 \text{ ط} + 1$$

$$24 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{n} \text{ جم } 1 \text{ ط} - \text{جم } 2 \text{ ط} + 1 + \text{جم } 2 \text{ ط} \text{ سے تقسیم پذیر ہے اگر } n \text{ کی}$$

شکل ۶ م۔ ۱ ہو اور (۱ + جم ۲ ط) سے تقسیم پذیر ہے اگر  $n$  کی شکل ۶ م + ۱ ہو  
یہاں  $m$  ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

ثابت کرو کہ

$$26 - \text{جم } 1 \text{ ط} - \text{جم } 2 \text{ ط} + 1 = \text{جم } 2 \text{ ط} + 1 + \text{جم } 2 \text{ ط} + 1 + \dots + 1$$

۲۶ - اگر  $n$  ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور

$$\text{مس } \left( \frac{1}{p} + \pi \frac{1}{p} \right) = \text{مس } \left( \frac{1}{p} + \pi \frac{1}{p} \right)$$





فرض کرو اب = اوب = ط؛ اور فرض کرو کہ مر ب اور مر ب'،  
ب اور ب' پر ماس ہیں، اور فرض کرو کہ ا پر کا ماس میں ا سے ہے۔  
دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ قوس اب کا طول، اس + س ب  
سے تجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح قوس ب اب، ب س + س ب' س  
+ س س' سے تجاوز نہیں کرتی اور اس لیے قوس ب اب > ب م  
+ م ب' یا قوس ب ا > ب م۔

نیز

قوس ب ا < ب ا < ب ج

اس لیے  $\frac{ب ج}{و ب} > \frac{قوس ب ا}{و ب} > \frac{ب م}{و ب}$

اب ط =  $\frac{قوس ب ا}{و ب}$ ، جب ط =  $\frac{ب ج}{و ب}$  اور مس ط =  $\frac{ب م}{و ب}$

125)

اس لیے جب ط > ط > مس ط۔ اگر ط،  $\frac{1}{p}$  سے بڑا ہوتا تو  
ہر، وکی دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ نامساواتیں جن کو ہم نے  
استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ رہتیں۔

چونکہ جب ط > ط > مس ط، اس لیے ا > جب ط > قط ط؛  
اب فرض کرو کہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب قط ط کی انتہا جبکہ  
ط = ۰، ایک ہے؛ اس لیے نیز جب ط کی انتہا بھی جبکہ ط کو لا انتہا  
گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

جب ط = (ط قم ط) اور مس ط = قط ط x (ط قم ط)

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ جب ط اور مس ط کی انتہا جبکہ ط

کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔  
 اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:- مثلث و اب، قاطع  
 و اب اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث  
 و اب =  $\frac{1}{4}$  و اب  $\times$  ب ج =  $\frac{1}{4}$  و اب ط، نیز قاطع و اب =  
 $\frac{1}{4}$  و اب ط، اور

$$۵ و ب م = \frac{1}{4} و ب \times ب م = \frac{1}{4} و ب \times م ط$$

اس لیے جب  $ط > م$   $ط > م$  ط  
 ۹۳۔ دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے  
 زاویہ کا دائرۃ ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش  
 ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور ماس  
 دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لا انتہا  
 گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً  
 ثنائی، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثنائیوں کی صورت میں

$$\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180} \times \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{جب ن}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180} \times \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{مس ن}}{\text{ن}}$$

جہاں ن ثنائیوں کا دائرۃ ناپ ط ہے؛ اس لیے جب ن، مس ن کی

انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لا انتہا گھٹا دیا جائے

کے مساوی ہے۔ پس اگر ہم دائرۃ ناپ کی بجائے ثنائی استعمال کریں تو

منابطوں کی اس بڑی جماعت میں جس میں  $ط = ۰$  کے لیے جب ط اور

مس ط کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہمیشہ  $\frac{\pi}{40 \times 90 \times 180}$





تو جب ط' ط اور ط -  $\frac{1}{4}$  ط' کے درمیان واقع ہوتا ہے اور

جم ط' ۱ -  $\frac{1}{4}$  ط' اور ۱ -  $\frac{1}{4}$  ط' +  $\frac{1}{4}$  ط' کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۹۰۔ اب ہم یہ دکھائی گئے کہ اگر ط >  $\frac{1}{4}$  ط' تو

جب ط < ط -  $\frac{1}{4}$  ط' اور جم ط > ۱ -  $\frac{1}{4}$  ط' +  $\frac{1}{4}$  ط' اس سے جب ط اور جم ط کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ

تنگ ہو جاتی ہیں۔  
ہم جانتے ہیں کہ

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}'$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}'$$

$$۳ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}'$$

ان مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، ۴، ...، ۴ - ۱ سے ضرب دو اور  
پھر جمع کر دو تو

$$۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جب } ط = ۴ (\text{جب } \frac{1}{4} \text{ ط} + \text{جب } \frac{1}{4} \text{ ط} + \dots + \text{جب } \frac{1}{4} \text{ ط})$$

$$ط \times \frac{۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}}{۴} - \text{جب } ط > ۴ \left( \frac{۲ \text{ ط}}{۴} + \frac{۲ \text{ ط}}{۳} + \dots + \frac{۲ \text{ ط}}{۲+۶۴} \right)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا کر تو  $\frac{۴ \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}}{۴}$  کی انتہا ایک ملتی ہے اور سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۳} + ۱$$

کی انتہا  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$  ؟

اس لیے ط۔ جب ط  $> \frac{1}{2^3}$  ط<sup>۳</sup>، یا جب ط  $< \frac{1}{2^3}$  ط۔ ط<sup>۳</sup>

نیز جم ط = ۱ - ۲ جب ط  $\frac{1}{2}$  ط

اس لیے جم ط  $> ۱ - ۲$  (ط  $\frac{1}{2}$  ط - ط<sup>۳</sup>)  $> ۱ - ۲$  (ط<sup>۳</sup> + ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup>)

پس جب ط، ط اور ط - ط<sup>۳</sup> کے درمیان واقع ہوتا

ہے؛ اور جم ط، ۱ - ط<sup>۳</sup> اور ۱ - ط<sup>۳</sup> + ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup> کے

درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ط، ط<sup>۳</sup> سے کم ہو۔

نیز چونکہ مس ط = جب ط \ جم ط اس لیے

$$\text{مس ط} < (ط - \frac{1}{2^3} ط^3) (1 - \frac{1}{2^3} ط^3) < (ط - \frac{1}{2^3} ط^3) (1 + \frac{1}{2^3} ط^3 + \frac{1}{2^6} ط^6)$$

یا مس ط  $< ط + \frac{1}{2^3} ط^3 + \frac{1}{2^6} ط^6 - \frac{1}{2^6} ط^6$ ، اس لیے مس ط  $< ط + \frac{1}{2^3} ط^3$

## یولر کا حاصل ضرب

۹۶ — چونکہ جب ط = ۲ جب ط  $\frac{1}{2}$  ط جم ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup>،

جب ط<sup>۳</sup> = ۲ جب ط<sup>۳</sup> جم ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup>،

جب ط<sup>۳</sup> = ۲ جب ط<sup>۳</sup> جم ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup>،

جب ط<sup>۳</sup> = ۲ جب ط<sup>۳</sup> جم ط<sup>۳</sup> ط<sup>۳</sup>،

اس لیے عملِ ضرب سے

(128) اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو  $\frac{1}{n}$  جب  $\frac{1}{n}$  کی انتہا ط ہے۔ پس حاصل ضرب

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{n}$

کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جائے جب ط ہے۔

اس حاصل ضرب میں رکھو  $\frac{1}{p} \times \pi$  تو ہمیں  $\pi$  کے لیے ویٹا کا یہ جملہ

$$\dots \times \frac{\sqrt{r+r}+r}{r} \times \frac{\sqrt{r+r}}{r} \times \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r}{\pi}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اشل

(۱) ثابت کر دو کہ جیسے  $\frac{1}{p}$  تک بڑھتا ہے جب  $\frac{1}{p}$  مسلسل گھٹتا ہے اور  $\frac{1}{p}$  مسلسل بڑھتا ہے۔

ہم دکھا چکے کہ جب  $\frac{p}{m} < \frac{jb(p+m)}{p+m}$  یعنی

(ط + هـ) جبط < ط (محم هـ جبط + جم ط جبط) یا

$$\frac{\text{جب } \infty}{b(\infty - 1) + \infty} < \frac{\text{سب } b}{b}$$

اہم جانتے ہیں کہ  $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$  اور  $\frac{1}{q} < \frac{1}{r}$  جب  $p < q < r$  اور  $p, q, r$  مثبت ہوں۔

تکمیل ۱۰۰ جم ۱۰۰ قسبت ۱۰۰ اور اس لیے ۱۰۰ مساوات بالانبات ہو چکی، اس طرح جب ط

ایک سے  $\frac{1}{11}$  تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے  $\frac{1}{11}$  تک بڑھتا ہے۔  
پھر ہم یہ دکھائی گئے کہ

$$\frac{\text{س}(\text{ط} + \text{س})}{\text{ط} + \text{س}} < \frac{\text{س} \text{ ط}}{\text{ط}} \quad \text{یا}$$

$$\text{ط جب } (\text{ط} + \text{س}) < \text{جم ط} \quad (\text{ط} + \text{س}) \text{ جب ط جم } (\text{ط} + \text{س})$$

$$\text{یعنی } \text{ط جب } \text{س} < \text{س جب ط جم } (\text{ط} + \text{س})$$

$$\text{یا } \frac{\text{جب } \text{س}}{\text{س}} < \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \text{ جم } (\text{ط} + \text{س})$$

اب ہم فرض کر سکتے ہیں  $\text{ط} > \text{س}$  پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{جب } \text{س}}{\text{س}} < \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \quad \text{اور اس لیے } \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} < \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \text{ جم } (\text{ط} + \text{س})$$

اس طرح  $\frac{\text{س}}{\text{ط}}$  ایک سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے  $\frac{1}{11}$  تک بڑھتا ہے۔

دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی ترسیموں سے یہ نظر آئیگا کہ مسائل بالادست میں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو فصل کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے  $\frac{1}{11}$  تک بڑھتا ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساوات  $\text{س} = \text{لا}$  لاکھ حقیقی اصولوں کی تعداد لا انتہا

ہے، نیز بڑی اصولوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۳۲ میں تفاعل  $\text{س}$  لاکھ ترسیم کھینچی گئی ہے؛ اسی شکل میں تفاعل

لا لاکھ ترسیم کھینچو، یہ ایک خط مستقیم ہے جو  $\text{و}$  میں سے گزرتا ہے۔ یہ خط مستقیم

مرسجا  $\text{س}$  لاکھ ترسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا، اور لاکھ دو قیمتیں جو نقاط تفاعل کے

تساظر میں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$\text{لا} = \frac{\pi}{4} (1 - \text{ک}^2) \quad \text{اور} \quad \frac{\pi}{4} (1 + \text{ک}^2)$$

$$\frac{1}{4}م - \frac{1}{7}م = \frac{1}{4}س$$

اس لیے نیز  $\frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}$ ،

$$\frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p}$$

اس لیے عمل جمع سے

$$\frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p} \text{ مس } \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p}$$

اب اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو  $\frac{1}{p} \text{ عم } \frac{1}{p}$  کی انتہائی قیمت  $\frac{1}{p}$  ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ  $\frac{1}{p} - \frac{1}{p}$  عم  $\frac{1}{p}$  ہے۔

اگر ہم رکھیں  $\frac{1}{p} = \frac{1}{n}$  تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ مس } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ مس } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ مس } \frac{1}{n} + \dots$$

### بعض جملوں کی انتہائیں

(180)

۹۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو جم  $\frac{1}{n}$ ، جب  $\frac{1}{n}$  میں

سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے (جم  $\frac{1}{n}$ )، (جب  $\frac{1}{n}$ ) میں

سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ کوئی عدد ہو جو ن کے

تابع نہیں ہے؛ لیکن اگر ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے

لاستہاری ہونے پر لاستہاری ہو جاتا ہے تو جملہ (جسم  $\frac{1}{n}$ ) ف (ن)،

(جب  $\frac{1}{n}$ ) ف (ن) جماعت ۱ سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں۔

(جم ط) ف (ن) کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو  
ع سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک } \frac{1}{p} = \text{ف (ن) لوک } (1 - \text{جب } \frac{1}{p})$$

اب ہم اس مسئلہ کو معلوم مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لاکو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو

$$\text{ہا } \frac{\text{لوک } (1 - \frac{1}{p})}{p} = 1$$

تب چونکہ

$$\text{لوک } \frac{1}{p} = \text{ف (ن) جب } \frac{1}{p} \quad \text{لوک } (1 - \text{جب } \frac{1}{p})$$

اس لیے لوک  $\frac{1}{p}$  کی انتہا  $\frac{1}{p}$  ف (ن) جب  $\frac{1}{p}$  کی انتہا کے مساوی  
ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ مؤخر الذکر انتہا موجود ہو۔ ہم  
حسب ذیل صورتوں میں لوک  $\frac{1}{p}$  کی انتہا اور اس لیے  $\frac{1}{p}$  کی انتہا معلوم  
کر سکتے ہیں:-

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب  $\frac{1}{p}$   
= ن جب  $\frac{1}{p}$  اور ن جب  $\frac{1}{p}$  کی انتہا  $\frac{1}{p}$  ہے اور جب  $\frac{1}{p}$   
کی صفر ہے؛ اس لیے لوک  $\frac{1}{p}$  کی انتہا صفر ہے اور اس لیے  $\frac{1}{p}$  کی انتہا  
ایک ہے۔

(۲) اگر ف (ن) = ن<sup>۲</sup> تو اس صورت میں ف (ن) جب  $\frac{1}{p}$   
= (ن جب  $\frac{1}{p}$ ) جس کی انتہا  $\frac{1}{p}$  ہے۔ اس لیے لوک  $\frac{1}{p}$  کی انتہا  $\frac{1}{p}$   
ہے اور  $\frac{1}{p}$  کی

(181)

(۳) اگر (ن) = ف جہاں ف < ۲ تو اس صورت میں  
 ف (ن) جب  $\frac{2}{ط} = \frac{ن}{ف}$  (ن جب  $\frac{ط}{ط}$ ) ۲ اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ ن  
 لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے لوک پر کی انتہا۔ ص ہے اور اس لیے ع کی  
 انتہا صفر ہے۔

۹۸ —  $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)^ن$  کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ  $\frac{جب\ ط}{ط}$  ایک سے کم ہے اور جب  $\frac{ط}{ط}$  (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے  $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)^ن$  کی انتہا ۱ یا ۱ اور (جم ط) کے درمیان واقع  
 ہے؛ اس طرح دفعہ مابقی کی صورت (۱) سے  $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)^ن$  کی انتہا  
 ایک ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ  $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)^ن$  اور  $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)^ف$

(ف < ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور  $\frac{ط}{ط}$  کے درمیان اور  
 ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں۔

زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے

اس کے دائرہ ناپ کی قوتوں میں

۹۹ — چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹) (۴۰) میں ۱ کی بجائے ط لکھو



اور فرض کرو لا = ن ط تو

$$\text{جب لا} = \text{ن} \text{ جم}^1 \text{ ط جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط جب}^2 \text{ ط} + \dots$$

$$+ \dots - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{1+2+3} \text{ جم}^3 \text{ ط جب}^3 \text{ ط} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^1 \text{ ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط جب}^2 \text{ ط} + \dots$$

$$+ \dots - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{1+2+3+4} \text{ جم}^3 \text{ ط جب}^3 \text{ ط} + \dots$$

ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے :-

(182)

$$\text{جب لا} = \text{لا} \text{ جم}^1 \text{ ط} - \left( \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right) - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})(\text{لا}-2\text{ط})}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط} \left( \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right)^2 + \dots$$

$$+ \dots - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط}) \dots (\text{لا}-2\text{ط})}{1+2+3} \text{ جم}^3 \text{ ط} \left( \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right)^3 + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^1 \text{ ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})}{2} \text{ جم}^2 \text{ ط} \left( \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right)^2 + \dots$$

$$+ \dots - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط}) \dots (\text{لا}-2\text{ط})}{1+2+3+4} \text{ جم}^3 \text{ ط} \left( \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \right)^3 + \dots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے۔ پس اس غرض کے لیے کہ جملوں کی انتہا حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

سلسلہ دکھا جائے جس میں رقموں کی تعداد مستقل ہو اور  $n$  کے ساتھ  
لا انتہا نہ بڑھے۔

جب لاکے لیے جو سلسلہ ہے اس کی  $(1+2)$  دیں رقم کو  $(1+1)$   
ویں رقم کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ہے

$$= \frac{(1+2)(1+3) \dots (1+n)}{(1+1)(1+2) \dots (1+n)} \times \left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2 ;$$

یہ عدد منفی ہے اور

$$\left\{ \frac{1}{(1+2)(1+3) \dots (1+n)} + \left(\frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right)^2 + \frac{1}{(1+1)} \times \frac{\text{لا}^2}{\text{ط}} \right\} \left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$$

سے عدد آگیا ہے۔

اگر لاک کی کوئی مستقل قیمت ہو تو  $\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$  گھٹتا ہے جیسے  $n$  بڑھتا ہے؛  
 $n$  اور  $n$  کی قیمتیں  $n$ ،  $n$  منتخب کی جاسکتی ہیں ایسی کہ جملہ بالاک کی قیمتیں  
 $n$  کے  $n$  اور  $n$  کے لیے ایک سے چھوٹی حاصل ہوں۔ پس لاک کی اس  
مستقل قیمت کے لیے اور  $n$  کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو  $n$  سے  
بڑی یا اس کے مساوی ہیں جب لاک سلسلہ ایسا ہے کہ ایک ثابت  
رقم (جس کا محل  $n$  پر منحصر نہیں ہے) سے اور اس کے بعد ہر رقم اپنی  
ماقبل رقم سے عدد آچھوٹی ہے۔ اب چونکہ ایک ایسے سلسلہ کا مجموعہ جس کی  
ارقام تبادلاً ثابت منفی ہوں اور ہر رقم اپنی ماقبل رقم سے عدد آچھوٹی ہو  
پہلی رقم سے چھوٹا ہوتا ہے اس لیے

$$\text{جب لا} = \text{لاجم}^1 - \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right) - \frac{\text{لا}(\text{لا} - \text{ط}) \dots (\text{لا} - \text{ط}^2)}{1} \cdot \text{جم}^3 \cdot \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^3$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \frac{\text{لا}(\text{لا} - \text{ط}) \dots (\text{لا} - \text{ط}^{n-2})}{(1+2) \dots (1+n-1)} \cdot \text{جم}^{n-1} \cdot \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{n-1}$$

جہاں  $\text{ط} = \frac{\text{لا}}{\text{ط}}$  بشرطیکہ  $n$  کے  $n$ ،  $n$  پر منحصر نہیں ہے اور صہ

(18) صفراور ا کے درمیان ایک عدد ہے۔ صحیح عدد ر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے جو اس سے کم نہ ہو۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم } 11 = \text{جم } 10 - \frac{(11-1)}{2} \text{ جم } 2 = \left(\frac{11-1}{2}\right) \text{ جم } 2$$

$$\dots - \left( \frac{b^2 - 1}{b} \right) b^{2-1} \frac{(b^2 - 1)(b^2 - 1)(b - 1)}{2!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{(1-p) \dots (1-p^{n-1})}{(1-p^n)} p^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

بشرطیکہ  $n$  کے  $n$ ،  $s$ ؛  $n$  پر منحصر نہیں ہے اور  $q$ ، صفر اور ایک کے درمیان ایک عدد ہے۔

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا۔ ٹرھا دیا گیا ہے تو جب لا اور جسم لا کے لیے جو جملے ہیں ان کی انتہایں ان تفاعلوں کو تعبیر کرنی چاہیں۔ اب چونکہ ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد مستقل ہے اور ن کے تابع نہیں۔ اس لیے ہمیں صرف مختلف رقموں کی انتہاؤں کو جمع کرنا ہو گا تاکہ مجموعہ کی انتہا معلوم ہو سکے۔ (جب طہ) کی انتہا جیسے کہ ن پر منحصر نہیں ہے ایک ہے۔ نیز جسم طہ۔ کہ طہ کی انتہا = جسم طہ کی انتہا

اور دفعہ ۹ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ لوک  $\text{جم} \text{ط} = ۱$ ، اور چونکہ  
لوک  $\text{جم} \text{ط} = ۱$  اس لیے لوک  $\text{جم} \text{ک} \text{ط} = ۱$  حاصل ہوتا ہے؟ اس لیے  
لوک  $\text{جم} \text{ن} \text{ک} \text{ط} = ۱$ ؟ اعداد صہ اور صہ، ن پر منحصر ہیں لیکن  
ن کی ہر قیمت کے لیے وہ صفر اور ایک کے درمیان ہیں اور اس لیے  
ان کی انتہائیں صہ اور صہ ایک سے تجاوز نہیں کر سکتیں۔ پس ہمیں  
حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \lambda = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\text{جم } \lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

جہاں صہ اور صہ مثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کر سکتے۔

یہ نتیجہ درست رہتے ہیں لا کی ہر قیمت کے لیے اور ر اور س کی تمام قیمتوں کے لیے جو ثابت صحیح اعداد اور س سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کی ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

اور جم لا حسب ذیل مستحق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ، جب لا سے

بقدر  $\frac{\lambda^{1+2m}}{1+2m}$  سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لا کی ہر قیمت کے لیے (184)

اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر رک کو کافی بڑا لیا جائے۔

یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت  $\frac{\lambda}{(1+2m)^{1/2}}$

$$\times \frac{\lambda^{1+2m}}{1+2m} : \frac{\lambda^{1-2m}}{1-2m} ، \text{ لا کی کسی مقررہ قیمت کے لیے رک کو}$$

کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔

اسی طرح کا استدلال ہم لاکے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

## مثالیں

(۱) ہم لاکو لاکی قوتوں میں پھیلاؤ۔

ہم لاکو لاکے پھیلاؤ =  $\frac{1}{n}$  (ہم لاکو لاکے پھیلاؤ =  $\frac{1}{n}$ ، اس لیے ہم لاکو لاکے پھیلاؤ میں ہم لاکے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(1) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \right)$$

یہ معلوم ہوگا کہ ہم لاکو لاکے پھیلاؤ میں کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں کے حاصل ضرب کو لاکو لاکے پھیلاؤ میں پھیلاؤ جاسکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لاکے پھیلاؤ کی جنوب یا جنوب الہام کی رقم میں بیان کریں۔

(۲) ہم لاکو لاکے قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں لاکو لاکے شامل ہے۔  
مس لاکو لاکے = جب لاکو لاکے

$$= \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots \right\}$$

فاسے اعلیٰ رتبہ کی قوتوں کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو صریح کو پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس لاکو لاکے} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots \right\}$$

ضرب دینے اور لاکو لاکے کی رقموں کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس لاکو لاکے} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$$

(۲) جب (مس لا) - مس (جب لا) کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا = .

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال مابقی کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \frac{1}{4} \text{مس}^2 \text{لا} + \frac{1}{12} \text{مس}^3 \text{لا} - \frac{1}{24} \text{مس}^4 \text{لا} + \frac{1}{40} \text{مس}^5 \text{لا} - \frac{1}{72} \text{مس}^6 \text{لا} + \frac{1}{112} \text{مس}^7 \text{لا} - \frac{1}{160} \text{مس}^8 \text{لا} + \frac{1}{252} \text{مس}^9 \text{لا} - \frac{1}{360} \text{مس}^{10} \text{لا} + \frac{1}{504} \text{مس}^{11} \text{لا} - \frac{1}{720} \text{مس}^{12} \text{لا} + \frac{1}{1008} \text{مس}^{13} \text{لا} - \frac{1}{1296} \text{مس}^{14} \text{لا} + \frac{1}{1680} \text{مس}^{15} \text{لا} - \frac{1}{2160} \text{مس}^{16} \text{لا} + \frac{1}{2800} \text{مس}^{17} \text{لا} - \frac{1}{3584} \text{مس}^{18} \text{لا} + \frac{1}{4536} \text{مس}^{19} \text{لا} - \frac{1}{5670} \text{مس}^{20} \text{لا} + \frac{1}{7056} \text{مس}^{21} \text{لا} - \frac{1}{8712} \text{مس}^{22} \text{لا} + \frac{1}{10656} \text{مس}^{23} \text{لا} - \frac{1}{12960} \text{مس}^{24} \text{لا} + \frac{1}{15680} \text{مس}^{25} \text{لا} - \frac{1}{18816} \text{مس}^{26} \text{لا} + \frac{1}{22400} \text{مس}^{27} \text{لا} - \frac{1}{26400} \text{مس}^{28} \text{لا} + \frac{1}{30912} \text{مس}^{29} \text{لا} - \frac{1}{35904} \text{مس}^{30} \text{لا} + \frac{1}{41472} \text{مس}^{31} \text{لا} - \frac{1}{47616} \text{مس}^{32} \text{لا} + \frac{1}{54336} \text{مس}^{33} \text{لا} - \frac{1}{61632} \text{مس}^{34} \text{لا} + \frac{1}{69600} \text{مس}^{35} \text{لا} - \frac{1}{78240} \text{مس}^{36} \text{لا} + \frac{1}{87552} \text{مس}^{37} \text{لا} - \frac{1}{97536} \text{مس}^{38} \text{لا} + \frac{1}{108192} \text{مس}^{39} \text{لا} - \frac{1}{119616} \text{مس}^{40} \text{لا} + \frac{1}{131808} \text{مس}^{41} \text{لا} - \frac{1}{144768} \text{مس}^{42} \text{لا} + \frac{1}{158496} \text{مس}^{43} \text{لا} - \frac{1}{173008} \text{مس}^{44} \text{لا} + \frac{1}{188304} \text{مس}^{45} \text{لا} - \frac{1}{204400} \text{مس}^{46} \text{لا} + \frac{1}{221312} \text{مس}^{47} \text{لا} - \frac{1}{239040} \text{مس}^{48} \text{لا} + \frac{1}{257584} \text{مس}^{49} \text{لا} - \frac{1}{276960} \text{مس}^{50} \text{لا} + \frac{1}{297168} \text{مس}^{51} \text{لا} - \frac{1}{318208} \text{مس}^{52} \text{لا} + \frac{1}{339984} \text{مس}^{53} \text{لا} - \frac{1}{363408} \text{مس}^{54} \text{لا} + \frac{1}{388480} \text{مس}^{55} \text{لا} - \frac{1}{415200} \text{مس}^{56} \text{لا} + \frac{1}{443568} \text{مس}^{57} \text{لا} - \frac{1}{473584} \text{مس}^{58} \text{لا} + \frac{1}{505248} \text{مس}^{59} \text{لا} - \frac{1}{538560} \text{مس}^{60} \text{لا} + \frac{1}{573536} \text{مس}^{61} \text{لا} - \frac{1}{610176} \text{مس}^{62} \text{لا} + \frac{1}{648480} \text{مس}^{63} \text{لا} - \frac{1}{688448} \text{مس}^{64} \text{لا} + \frac{1}{730080} \text{مس}^{65} \text{لا} - \frac{1}{773376} \text{مس}^{66} \text{لا} + \frac{1}{818320} \text{مس}^{67} \text{لا} - \frac{1}{864912} \text{مس}^{68} \text{لا} + \frac{1}{913152} \text{مس}^{69} \text{لا} - \frac{1}{963040} \text{مس}^{70} \text{لا} + \frac{1}{1014576} \text{مس}^{71} \text{لا} - \frac{1}{1067760} \text{مس}^{72} \text{لا} + \frac{1}{1122592} \text{مس}^{73} \text{لا} - \frac{1}{1179072} \text{مس}^{74} \text{لا} + \frac{1}{1237200} \text{مس}^{75} \text{لا} - \frac{1}{1296976} \text{مس}^{76} \text{لا} + \frac{1}{1358400} \text{مس}^{77} \text{لا} - \frac{1}{1421488} \text{مس}^{78} \text{لا} + \frac{1}{1486224} \text{مس}^{79} \text{لا} - \frac{1}{1552608} \text{مس}^{80} \text{لا} + \frac{1}{1620640} \text{مس}^{81} \text{لا} - \frac{1}{1690320} \text{مس}^{82} \text{لا} + \frac{1}{1761648} \text{مس}^{83} \text{لا} - \frac{1}{1834624} \text{مس}^{84} \text{لا} + \frac{1}{1909248} \text{مس}^{85} \text{لا} - \frac{1}{1985520} \text{مس}^{86} \text{لا} + \frac{1}{2063440} \text{مس}^{87} \text{لا} - \frac{1}{2143008} \text{مس}^{88} \text{لا} + \frac{1}{2224224} \text{مس}^{89} \text{لا} - \frac{1}{2307088} \text{مس}^{90} \text{لا} + \frac{1}{2391600} \text{مس}^{91} \text{لا} - \frac{1}{2477760} \text{مس}^{92} \text{لا} + \frac{1}{2565568} \text{مس}^{93} \text{لا} - \frac{1}{2655024} \text{مس}^{94} \text{لا} + \frac{1}{2746144} \text{مس}^{95} \text{لا} - \frac{1}{2838912} \text{مس}^{96} \text{لا} + \frac{1}{2933328} \text{مس}^{97} \text{لا} - \frac{1}{3029392} \text{مس}^{98} \text{لا} + \frac{1}{3127104} \text{مس}^{99} \text{لا} - \frac{1}{3226464} \text{مس}^{100} \text{لا} + \frac{1}{3327472} \text{مس}^{101} \text{لا} - \frac{1}{3429136} \text{مس}^{102} \text{لا} + \frac{1}{3532448} \text{مس}^{103} \text{لا} - \frac{1}{3637408} \text{مس}^{104} \text{لا} + \frac{1}{3744016} \text{مس}^{105} \text{لا} - \frac{1}{3852272} \text{مس}^{106} \text{لا} + \frac{1}{3962176} \text{مس}^{107} \text{لا} - \frac{1}{4073728} \text{مس}^{108} \text{لا} + \frac{1}{4186928} \text{مس}^{109} \text{لا} - \frac{1}{4301776} \text{مس}^{110} \text{لا} + \frac{1}{4418272} \text{مس}^{111} \text{لا} - \frac{1}{4536416} \text{مس}^{112} \text{لا} + \frac{1}{4656208} \text{مس}^{113} \text{لا} - \frac{1}{4777648} \text{مس}^{114} \text{لا} + \frac{1}{4899736} \text{مس}^{115} \text{لا} - \frac{1}{5023472} \text{مس}^{116} \text{لا} + \frac{1}{5148856} \text{مس}^{117} \text{لا} - \frac{1}{5275888} \text{مس}^{118} \text{لا} + \frac{1}{5404568} \text{مس}^{119} \text{لا} - \frac{1}{5534896} \text{مس}^{120} \text{لا} + \frac{1}{5666872} \text{مس}^{121} \text{لا} - \frac{1}{5799496} \text{مس}^{122} \text{لا} + \frac{1}{5933768} \text{مس}^{123} \text{لا} - \frac{1}{6069688} \text{مس}^{124} \text{لا} + \frac{1}{6207256} \text{مس}^{125} \text{لا} - \frac{1}{6346472} \text{مس}^{126} \text{لا} + \frac{1}{6487336} \text{مس}^{127} \text{لا} - \frac{1}{6629848} \text{مس}^{128} \text{لا} + \frac{1}{6774008} \text{مس}^{129} \text{لا} - \frac{1}{6919816} \text{مس}^{130} \text{لا} + \frac{1}{7067272} \text{مس}^{131} \text{لا} - \frac{1}{7216376} \text{مس}^{132} \text{لا} + \frac{1}{7367128} \text{مس}^{133} \text{لا} - \frac{1}{7519536} \text{مس}^{134} \text{لا} + \frac{1}{7673592} \text{مس}^{135} \text{لا} - \frac{1}{7829304} \text{مس}^{136} \text{لا} + \frac{1}{7986672} \text{مس}^{137} \text{لا} - \frac{1}{8145704} \text{مس}^{138} \text{لا} + \frac{1}{8306392} \text{مس}^{139} \text{لا} - \frac{1}{8468736} \text{مس}^{140} \text{لا} + \frac{1}{8632736} \text{مس}^{141} \text{لا} - \frac{1}{8798392} \text{مس}^{142} \text{لا} + \frac{1}{8965704} \text{مس}^{143} \text{لا} - \frac{1}{9134672} \text{مس}^{144} \text{لا} + \frac{1}{9305304} \text{مس}^{145} \text{لا} - \frac{1}{9477592} \text{مس}^{146} \text{لا} + \frac{1}{9651536} \text{مس}^{147} \text{لا} - \frac{1}{9827136} \text{مس}^{148} \text{لا} + \frac{1}{10004392} \text{مس}^{149} \text{لا} - \frac{1}{10183304} \text{مس}^{150} \text{لا} + \frac{1}{10363968} \text{مس}^{151} \text{لا} - \frac{1}{10546288} \text{مس}^{152} \text{لا} + \frac{1}{10730264} \text{مس}^{153} \text{لا} - \frac{1}{10915896} \text{مس}^{154} \text{لا} + \frac{1}{11103184} \text{مس}^{155} \text{لا} - \frac{1}{11292128} \text{مس}^{156} \text{لا} + \frac{1}{11482736} \text{مس}^{157} \text{لا} - \frac{1}{11675008} \text{مس}^{158} \text{لا} + \frac{1}{11868944} \text{مس}^{159} \text{لا} - \frac{1}{12064544} \text{مس}^{160} \text{لا} + \frac{1}{12261808} \text{مس}^{161} \text{لا} - \frac{1}{12460736} \text{مس}^{162} \text{لا} + \frac{1}{12661328} \text{مس}^{163} \text{لا} - \frac{1}{12863584} \text{مس}^{164} \text{لا} + \frac{1}{13067504} \text{مس}^{165} \text{لا} - \frac{1}{13273088} \text{مس}^{166} \text{لا} + \frac{1}{13480336} \text{مس}^{167} \text{لا} - \frac{1}{13689248} \text{مس}^{168} \text{لا} + \frac{1}{13899824} \text{مس}^{169} \text{لا} - \frac{1}{14112064} \text{مس}^{170} \text{لا} + \frac{1}{14325968} \text{مس}^{171} \text{لا} - \frac{1}{14541536} \text{مس}^{172} \text{لا} + \frac{1}{14758768} \text{مس}^{173} \text{لا} - \frac{1}{14977664} \text{مس}^{174} \text{لا} + \frac{1}{15198224} \text{مس}^{175} \text{لا} - \frac{1}{15419448} \text{مس}^{176} \text{لا} + \frac{1}{15641328} \text{مس}^{177} \text{لا} - \frac{1}{15864864} \text{مس}^{178} \text{لا} + \frac{1}{16089968} \text{مس}^{179} \text{لا} - \frac{1}{16316640} \text{مس}^{180} \text{لا} + \frac{1}{16544880} \text{مس}^{181} \text{لا} - \frac{1}{16774688} \text{مس}^{182} \text{لا} + \frac{1}{17006064} \text{مس}^{183} \text{لا} - \frac{1}{17239008} \text{مس}^{184} \text{لا} + \frac{1}{17473512} \text{مس}^{185} \text{لا} - \frac{1}{17709584} \text{مس}^{186} \text{لا} + \frac{1}{17947216} \text{مس}^{187} \text{لا} - \frac{1}{18186408} \text{مس}^{188} \text{لا} + \frac{1}{18427160} \text{مس}^{189} \text{لا} - \frac{1}{18669472} \text{مس}^{190} \text{لا} + \frac{1}{18913344} \text{مس}^{191} \text{لا} - \frac{1}{19158776} \text{مس}^{192} \text{لا} + \frac{1}{19405768} \text{مس}^{193} \text{لا} - \frac{1}{19654320} \text{مس}^{194} \text{لا} + \frac{1}{19904432} \text{مس}^{195} \text{لا} - \frac{1}{20156104} \text{مس}^{196} \text{لا} + \frac{1}{20409344} \text{مس}^{197} \text{لا} - \frac{1}{20664152} \text{مس}^{198} \text{لا} + \frac{1}{20920528} \text{مس}^{199} \text{لا} - \frac{1}{21178472} \text{مس}^{200} \text{لا} + \frac{1}{21437992} \text{مس}^{201} \text{لا} - \frac{1}{21699088} \text{مس}^{202} \text{لا} + \frac{1}{21961760} \text{مس}^{203} \text{لا} - \frac{1}{22225992} \text{مس}^{204} \text{لا} + \frac{1}{22491784} \text{مس}^{205} \text{لا} - \frac{1}{22759136} \text{مس}^{206} \text{لا} + \frac{1}{23028048} \text{مس}^{207} \text{لا} - \frac{1}{23298520} \text{مس}^{208} \text{لا} + \frac{1}{23570560} \text{مس}^{209} \text{لا} - \frac{1}{23844168} \text{مس}^{210} \text{لا} + \frac{1}{24119344} \text{مس}^{211} \text{لا} - \frac{1}{24396088} \text{مس}^{212} \text{لا} + \frac{1}{24674400} \text{مس}^{213} \text{لا} - \frac{1}{24954280} \text{مس}^{214} \text{لا} + \frac{1}{25235728} \text{مس}^{215} \text{لا} - \frac{1}{25518744} \text{مس}^{216} \text{لا} + \frac{1}{25803328} \text{مس}^{217} \text{لا} - \frac{1}{26089480} \text{مس}^{218} \text{لا} + \frac{1}{26377200} \text{مس}^{219} \text{لا} - \frac{1}{26666496} \text{مس}^{220} \text{لا} + \frac{1}{26957368} \text{مس}^{221} \text{لا} - \frac{1}{27249808} \text{مس}^{222} \text{لا} + \frac{1}{27543816} \text{مس}^{223} \text{لا} - \frac{1}{27839392} \text{مس}^{224} \text{لا} + \frac{1}{28136536} \text{مس}^{225} \text{لا} - \frac{1}{28435248} \text{مس}^{226} \text{لا} + \frac{1}{28735528} \text{مس}^{227} \text{لا} - \frac{1}{29037376} \text{مس}^{228} \text{لا} + \frac{1}{29340792} \text{مس}^{229} \text{لا} - \frac{1}{29645776} \text{مس}^{230} \text{لا} + \frac{1}{29952328} \text{مس}^{231} \text{لا} - \frac{1}{30260448} \text{مس}^{232} \text{لا} + \frac{1}{30570128} \text{مس}^{233} \text{لا} - \frac{1}{30881368} \text{مس}^{234} \text{لا} + \frac{1}{31194168} \text{مس}^{235} \text{لا} - \frac{1}{31508528} \text{مس}^{236} \text{لا} + \frac{1}{31824448} \text{مس}^{237} \text{لا} - \frac{1}{32141928} \text{مس}^{238} \text{لا} + \frac{1}{32460968} \text{مس}^{239} \text{لا} - \frac{1}{32781568} \text{مس}^{240} \text{لا} + \frac{1}{33103728} \text{مس}^{241} \text{لا} - \frac{1}{33427448} \text{مس}^{242} \text{لا} + \frac{1}{33752728} \text{مس}^{243} \text{لا} - \frac{1}{34079568} \text{مس}^{244} \text{لا} + \frac{1}{34407968} \text{مس}^{245} \text{لا} - \frac{1}{34737928} \text{مس}^{246} \text{لا} + \frac{1}{35069448} \text{مس}^{247} \text{لا} - \frac{1}{35402528} \text{مس}^{248} \text{لا} + \frac{1}{35737168} \text{مس}^{249} \text{لا} - \frac{1}{36073368} \text{مس}^{250} \text{لا} + \frac{1}{36411128} \text{مس}^{251} \text{لا} - \frac{1}{36750448} \text{مس}^{252} \text{لا} + \frac{1}{37091328} \text{مس}^{253} \text{لا} - \frac{1}{37433768} \text{مس}^{254} \text{لا} + \frac{1}{37777768} \text{مس}^{255} \text{لا} - \frac{1}{38123328} \text{مس}^{256} \text{لا} + \frac{1}{38470448} \text{مس}^{257} \text{لا} - \frac{1}{38819128} \text{مس}^{258} \text{لا} + \frac{1}{39169368} \text{مس}^{259} \text{لا} - \frac{1}{39521168} \text{مس}^{260} \text{لا} + \frac{1}{39874528} \text{مس}^{261} \text{لا} - \frac{1}{40229448} \text{مس}^{262} \text{لا} + \frac{1}{40585928} \text{مس}^{263} \text{لا} - \frac{1}{40943968} \text{مس}^{264} \text{لا} + \frac{1}{41303568} \text{مس}^{265} \text{لا} - \frac{1}{41664728} \text{مس}^{266} \text{لا} + \frac{1}{42027448} \text{مس}^{267} \text{لا} - \frac{1}{42391728} \text{مس}^{268} \text{لا} + \frac{1}{42757568} \text{مس}^{269} \text{لا} - \frac{1}{43124968} \text{مس}^{270} \text{لا} + \frac{1}{43493928} \text{مس}^{271} \text{لا} - \frac{1}{43864448} \text{مس}^{272} \text{لا} + \frac{1}{44236528} \text{مس}^{273} \text{لا} - \frac{1}{44609168} \text{مس}^{274} \text{لا} + \frac{1}{44983368} \text{مس}^{275} \text{لا} - \frac{1}{45359128} \text{مس}^{276} \text{لا} + \frac{1}{45736448} \text{مس}^{277} \text{لا} - \frac{1}{46115328} \text{مس}^{278} \text{لا} + \frac{1}{46495768} \text{مس}^{279} \text{لا} - \frac{1}{46877768} \text{مس}^{280} \text{لا} + \frac{1}{47261328} \text{مس}^{281} \text{لا} - \frac{1}{47646448} \text{مس}^{282} \text{لا} + \frac{1}{48033128} \text{مس}^{283} \text{لا} - \frac{1}{48421368} \text{مس}^{284} \text{لا} + \frac{1}{48811168} \text{مس}^{285} \text{لا} - \frac{1}{49202528} \text{مس}^{286} \text{لا} + \frac{1}{49595448} \text{مس}^{287} \text{لا} - \frac{1}{49989928} \text{مس}^{288} \text{لا} + \frac{1}{50385968} \text{مس}^{289} \text{لا} - \frac{1}{50783568} \text{مس}^{290} \text{لا} + \frac{1}{51182728} \text{مس}^{291} \text{لا} - \frac{1}{51583448} \text{مس}^{292} \text{لا} + \frac{1}{51985728} \text{مس}^{293} \text{لا} - \frac{1}{52389568} \text{مس}^{294} \text{لا} + \frac{1}{52794968} \text{مس}^{295} \text{لا} - \frac{1}{53201928} \text{مس}^{296} \text{لا} + \frac{1}{53610448} \text{مس}^{297} \text{لا} - \frac{1}{54020528} \text{مس}^{298} \text{لا} + \frac{1}{54432168} \text{مس}^{299} \text{لا} - \frac{1}{54845368} \text{مس}^{300} \text{لا} + \frac{1}{55259128} \text{مس}^{301} \text{لا} - \frac{1}{55674448} \text{مس}^{302} \text{لا} + \frac{1}{56091328} \text{مس}^{303} \text{لا} - \frac{1}{56509768} \text{مس}^{304} \text{لا} + \frac{1}{56929768} \text{مس}^{305} \text{لا} - \frac{1}{57351328} \text{مس}^{306} \text{لا} + \frac{1}{57774448} \text{مس}^{307} \text{لا} - \frac{1}{58199128} \text{مس}^{308} \text{لا} + \frac{1}{58625368} \text{مس}^{309} \text{لا} - \frac{1}{59053168} \text{مس}^{310} \text{لا} + \frac{1}{59482528} \text{مس}^{311} \text{لا} - \frac{1}{59913448} \text{مس}^{312} \text{لا} + \frac{1}{60345928} \text{مس}^{313} \text{لا} - \frac{1}{60779968} \text{مس}^{314} \text{لا} + \frac{1}{61215568} \text{مس}^{315} \text{لا} - \frac{1}{61652728} \text{مس}^{316} \text{لا} + \frac{1}{62091448} \text{مس}^{317} \text{لا} - \frac{1}{62531728} \text{مس}^{318} \text{لا} + \frac{1}{62973568} \text{مس}^{319} \text{لا} - \frac{1}{63416968} \text{مس}^{320} \text{لا} + \frac{1}{63861928} \text{مس}^{321} \text{لا} - \frac{1}{64308448} \text{مس}^{322} \text{لا} + \frac{1}{64756488} \text{مس}^{323} \text{لا} - \frac{1}{65206048} \text{مس}^{324} \text{لا} + \frac{1}{65657128} \text{مس}^{325} \text{لا} - \frac{1}{66109728} \text{مس}^{326} \text{لا} + \frac{1}{66563848} \text{مس}^{327} \text{لا} - \frac{1}{67019488} \text{مس}^{328} \text{لا} + \frac{1}{67476648} \text{مس}^{329} \text{لا} - \frac{1}{67935328} \text{مس}^{330} \text{لا} + \frac{1}{68395528} \text{مس}^{331} \text{لا} - \frac{1}{68857248} \text{مس}^{332} \text{لا} + \frac{1}{69320488} \text{مس}^{333} \text{لا} - \frac{1}{69785248} \text{مس}^{334} \text{لا} + \frac{1}{70251528} \text{مس}^{335} \text{لا} - \frac{1}{70719328} \text{مس}^{336} \text{لا} + \frac{1}{71188648} \text{مس}^{337} \text{لا} - \frac{1}{71659488} \text{مس}^{338} \text{لا} + \frac{1}{72131848} \text{مس}^{339} \text{لا} - \frac{1}{72605728} \text{مس}^{340} \text{لا} + \frac{1}{73081128} \text{مس}^{341} \text{لا} - \frac{1}{73558048} \text{مس}^{342} \text{لا} + \frac{1}{74036488} \text{مس}^{343} \text{لا} - \frac{1}{74516448} \text{مس}^{344} \text{لا} + \frac{1}{74997928} \text{مس}^{345} \text{لا} - \frac{1}{75480928} \text{مس}^{346} \text{لا} + \frac{1}{75965448} \text{مس}^{347} \text{لا} - \frac{1}{76451488} \text{مس}^{348} \text{لا} + \frac{1}{76939048} \text{مس}^{349} \text{لا} - \frac{1}{77428128} \text{مس}^{350} \text{لا} + \frac{1}{77918728} \text{مس}^{351} \text{لا} - \frac{1}{78410848} \text{مس}^{352} \text{لا} + \frac{1}{78904488} \text{مس}^{353} \text{لا} - \frac{1}{79399648} \text{مس}^{354} \text{لا} + \frac{1}{79896328} \text{مس}^{355} \text{لا} - \frac{1}{80394528} \text{مس}^{356} \text{لا} + \frac{1}{80894248} \text{مس}^{357} \text{لا} - \frac{1}{81395488} \text{مس}^{358} \text{لا} + \frac{1}{81898248} \text{مس}^{359} \text{لا} - \frac{1}{82402528} \text{مس}^{360} \text{لا} + \frac{1}{82908328} \text{مس}^{361} \text{لا} - \frac{1}{83415648} \text{مس}^{362} \text{لا} + \frac{1}{83924488} \text{مس}^{363} \text{لا} - \frac{1}{84434848} \text{مس}^{364} \text{لا} + \frac{1}{84946728} \text{مس}^{365} \text{لا} - \frac{1}{85459128} \text{مس}^{366} \text{لا} + \frac{1}{85973048} \text{مس}^{367} \text{لا} - \frac{1}{86488488} \text{مس}^{368} \text{لا} + \frac{1}{86995448} \text{مس}^{369} \text{لا} - \frac{1}{87503928} \text{مس}^{370} \text{لا} + \frac{1}{88013928} \text{مس}^{371} \text{لا} - \frac{1}{88525448} \text{مس}^{372} \text{لا} + \frac{1}{89038488} \text{مس}^{373} \text{لا} - \frac{1}{89553048} \text{مس}^{374} \text{لا} + \frac{1}{90069128} \text{مس}^{375} \text{لا} - \frac{1}{90586728} \text{مس}^{376} \text{لا} + \frac{1}{91105848} \text{مس}^{377} \text{لا} - \frac{1}{91626488} \text{مس}^{378} \text{لا} + \frac{1}{92148648} \text{مس}^{379} \text{لا} - \frac{1}{92672328} \text{مس}^{380} \text{لا} + \frac{1}{93197528} \text{مس}^{381} \text{لا} - \frac{1}{93724248} \text{مس}^{382} \text{لا} + \frac{1}{94252488} \text{مس}^{383} \text{لا} - \frac{1}{94782248} \text{مس}^{384} \text{لا} + \frac{1}{95313528} \text{مس}^{385} \text{لا} - \frac{1}{95846328} \text{مس}^{386} \text{لا} + \frac{1}{96380648} \text{مس}^{387} \text{لا} - \frac{1}{96916488} \text{مس}^{388} \text{لا} + \frac{1}{97453848} \text{مس}^{389} \text{لا} - \frac{1}{97992728} \text{مس}^{390} \text{لا} + \frac{1}{98533128} \text{مس}^{391} \text{لا} - \frac{1}{99075048} \text{مس}^{392} \text{لا} + \frac{1}{99618488} \text{مس}^{393} \text{لا} - \frac{1}{100163448} \text{مس}^{394} \text{لا} + \frac{1}{100710928} \text{مس}^{395} \text{لا} - \frac{1}{101260928} \text{مس}^{396} \text{لا} + \frac{1}{101813448} \text{مس}^{397} \text{لا} - \frac{1}{102368488} \text{مس}^{398} \text{لا} + \frac{1}{102925928} \text{مس}^{399} \text{لا} - \frac{1}{103485848} \text{مس}^{400} \text{لا} + \frac{1}{104048248} \text{مس}^{401} \text{لا} - \frac{1}{104613128} \text{مس}^{402} \text{لا} + \frac{1}{105180488} \text{مس}^{403} \text{لا} - \frac{1}{105750328} \text{مس}^{404} \text{لا} + \frac{1}{106322648} \text{مس}^{405} \text{لا} - \frac{1}{106897448} \text{مس}^{406} \text{لا} + \frac{1}{107474728} \text{مس}^{407} \text{لا} - \frac{1}{108054488} \text{مس}^{408} \text{لا} + \frac{1}{108636728} \text{مس}^{409} \text{لا} - \frac{1}{109221448} \text{مس}^{410} \text{لا} + \frac{1}{109808648} \text{مس}^{411} \text{لا} - \frac{1}{110398328} \text{مس}^{412} \text{لا} + \frac{1}{110990488} \text{مس}^{413} \text{لا} - \frac{1}{111585048} \text{مس}^{414} \text{لا} + \frac{1}{112182088} \text{مس}^{415} \text{لا} - \frac{1}{112781528} \text{مس}^{416} \text{لا} + \frac{1}{113383448} \text{مس$$

جو تھے باب کے دفعات ۴۴ اور ۴۵ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل  
مثلثی اور جبری متماثلات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلثی متماثل سے  
جبری متماثل حاصل ہوتی ہے اگر متذکرہ بالا طریقہ کو کام میں لایا جائے۔  
مثلاً دفعہ ۴۴ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{ج} \text{ جب } \text{ا} \text{ جب } (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) - ۲ \text{ جب } \text{ا} \text{ جب } \text{ب} \text{ جب } \text{ج}$$

= جب (ب + ج - ا) جب (ج + ا - ب) جب (ا + ب - ج)  
اگر ہم جیوب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں  
حسب ذیل متماثل جبری متماثل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ج} \text{ا} (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) - ۲ \text{ا} \text{ب} \text{ج} = (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) (\text{ج} + \text{ا} - \text{ب}) (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

## آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$\text{مس} \text{ط} \leq ۲ \text{مس} \frac{1}{\text{ط}} \text{ط} \text{ جہاں } \text{ط} > \frac{1}{\pi}$$

۲۔ مس ۳ ط مم ۳ ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صفر سے  $\frac{1}{\pi}$  تک  
بڑھتا ہے ان کو مرتسم کرو۔

ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت ۱۷ - ۱۲ ط ہے اور اعظم قیمت ۱۷ + ۱۲ ط ہے۔  
۳۔ ثابت کرو کہ مس ۳ ط مم ۳ ط اور  $\frac{1}{\pi}$  کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

$$\text{۴۔ ثابت کرو کہ } \text{ط} < \frac{۳ \text{ جب } \text{ط}}{۲ + \text{جم} \text{ط}} \text{ جہاں } \text{ط} > \frac{1}{\pi}$$

۵۔ ثابت کرو کہ ۳ مس ۵ ط < ۵ مس ۳ ط، اگر ط صفر اور  $\frac{\pi}{۱۰}$  کے درمیان واقع ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{\text{ط}^۲} - \frac{1}{\text{ط}}$  کی انتہائی قیمت (جبکہ ط = ۰)  $\frac{1}{\pi}$  ہے۔

- ۷۔ ثابت کرو کہ جب  $(\text{جم } ط) > (\text{جم } ط)$ ، ط کی تمام قیمتوں کے لیے۔ (۱۵)  
 ۸۔ ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(1 - \frac{1}{p}) (1 - \frac{1}{p^2}) (1 - \frac{1}{p^3}) \dots$$

کی انتہائی قیمت  $\frac{1}{p}$  ہے۔

۹۔ اگر  $\frac{(\text{ط} - \text{ذ})}{\text{جب ذ}} = 1 + n$  اور  $n$  بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ذ} = (1 - \frac{1}{p})^n \text{ جب } \frac{1}{p} \text{، تقریباً}$$

۱۰۔ جب  $(\text{ط جم } ط)$  کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

۱۱۔  $\frac{\text{مس } ۲ - \text{ط } ۲}{\text{ط } ۳}$  کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ  $\frac{1}{p} = 0$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\left( \frac{\text{مم } ط}{\text{ط } ۲ - \text{ط } ۲} \right) \text{ مس } \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right)$$

کی انتہائی قیمت  $\frac{3}{2}$  ہے جبکہ  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\left( \frac{\text{جب } ۱}{\text{ط } ۱} \right) = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \dots$$

۱۴۔ اگر مساوات  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \text{مس } ط$

میں  $\text{مس } ط$ ،  $\text{مم } ط$ ،  $\text{مم } ط$  سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ط

$$\frac{1}{p} (\text{مم } ط + \text{مم } ط + \text{مم } ط + \text{مم } ط)$$



کے تقریباً مساوی ہے۔

۱۵۔ سلسلہ ذیل جمع کرو۔

$$\text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \dots \text{نہیں ختم ہوتا}$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \text{مس } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + \dots \text{نہیں ختم ہوتا}$$

کا حاصل جمع مس لا ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ط۔ جب ط جم ط} = ۲ \text{ جب ط جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + ۲ \text{ جب ط جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \dots \text{نہیں ختم ہوتا}$$

$$۱۸۔ \text{ثابت کرو کہ } \text{مس ط} = \frac{\text{ط}}{\text{جم ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{جم ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{جم ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{جم ط}} + \dots$$

۱۹۔ اگر  $\text{ط} > ۲$  تو ثابت کرو کہ

$$۲ \left[ \text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \dots + \text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \right]$$

$$\times \left[ \text{جب ط} \times \text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \dots + \text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \right]$$

۲۰۔ اگر لا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر  $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{ب}) = \frac{۱}{ب} (۱ + \frac{۱}{ب})$  (۱۳۶)

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{ب} (۱ + \frac{۱}{ب}) = \frac{۱}{ب} (۱ + \frac{۱}{ب}) \text{ اور علیٰ ہذا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{\frac{۱}{ب} (۱ - \frac{۱}{ب})}{\frac{۱}{ب}} = \infty = \frac{۱}{ب}$$

بتاؤ کہ کس طرح  $\pi$  کی قیمت اس ضابطہ کے ذریعہ محسوب کی جاسکتی ہے۔  
۲۱۔ لائنابی حاصل ضرب

(جب  $\frac{1}{2}$  جم  $\frac{1}{2}$  ط)  $\frac{1}{2}$  (جب  $\frac{1}{4}$  جم  $\frac{1}{4}$  ط)  $\frac{1}{4}$  (جب  $\frac{1}{8}$  جم  $\frac{1}{8}$  ط)  $\frac{1}{8}$  ...  
کی انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر مس ط = ۴ ط تو ط کی قیمت صفر اور  $\frac{1}{2}$   $\pi$  کے درمیان یہ ہوگی

$$\left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{11}{\pi^3} + \frac{103}{\pi^4} + \dots \right) - \frac{\pi}{2}$$

۲۳۔ ثابت کرو کہ

$$\sum \left\{ \frac{\text{جب } \frac{1}{2}}{1 - \frac{\text{جم } \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{\text{جب } \frac{1}{2}}{1 + \text{جم } \frac{1}{2}}$$

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ط} + \frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ ط} + \frac{1}{8} \text{ جم } \frac{1}{8} \text{ ط} + \dots = \frac{1 + \frac{1}{2} \text{ ط}}{1 + \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ ط}}$$

۲۵۔ ان رقموں تک جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{4} \text{ لوک مس } \frac{1}{2} \text{ ط} + \frac{1}{8} \text{ لوک مس } \frac{1}{4} \text{ ط} + \frac{1}{16} \text{ لوک مس } \frac{1}{8} \text{ ط} + \dots$$

۲۶۔ اگر یہ دیا جائے کہ  $\frac{\text{ط} \text{ جب } \frac{1}{2}}{\text{ط} \text{ جب } \frac{1}{2}}$  کی انتہائی قیمت جبکہ ط = ۰ صفر نہ لائنابی

تو ن معلوم کرو۔

$$1 - \text{جم } \frac{1}{2} \text{ ط} + \text{جم } \frac{1}{4} \text{ ط} - \text{جم } \frac{1}{8} \text{ ط} + \text{جم } \frac{1}{16} \text{ ط} - \dots$$

۲۷۔ ۳ - جم  $\frac{1}{2}$  ط + جم  $\frac{1}{4}$  ط  
کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = ۰

۲۸۔ ثابت کرو کہ اس لائناری سلسلہ کا مجموعہ جس کی رو میں رقم

$$(1 - r) \times \frac{1}{1 - r^2} = \frac{1}{2 - r^2}$$

ہے  $\frac{1}{2 - r^2}$  جب  $(1 + \pi \frac{1}{r})$  ہے۔

۲۹۔ اگر صہ بہت چھوٹا ہو اور نہ  $\pi = ط - ۲$  صہ جب  $ط + \frac{۳}{۲}$  صہ جب  $ط$  طہ تو ثابت کرو کہ

۳۰۔ اگر  $ما = ی + ک$  جب  $(ی + ک)$  توی کو چھوٹی مقدار اس کی قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں ک شامل ہے۔

۳۱۔ مثلثی متانلہ

جب (د-ب) جب (ا-ج) + جب (ب-ج) جب (ا-د) + جب (ج-د) جب (ا-ب) =  
سے جبری متانلہ

(د-ب) (ا-ج) + (د-ب) (ج-ا) + (د-ب) (ج-ا) + (د-ب) (ج-ا) + (د-ب) (ج-ا) + (د-ب) (ج-ا)

$$= (ج-د) (ا-ب) + (ج-د) (ب-ا) + (ج-د) (ب-ا) + (ج-د) (ب-ا) + (ج-د) (ب-ا) + (ج-د) (ب-ا)$$

اخذ کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ  $\frac{۳}{۲}$  جب  $\frac{۳}{۲}$  سے تقریباً  $\frac{۳}{۲}$  کا فرق رکھتا ہے جہاں (188)

فہ ایک چھوٹا زاویہ ہے۔

۳۳۔ اس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے مقامات تک معلوم کرو جو مساوات

$$جب (لا + \frac{1}{\pi}) = ۱۰$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۴۔ مساوات (جب ط)  $\frac{۱}{\pi} = ب$  کو تقریبی طور پر مل کر جہاں مثبت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ ط، ع کے تقریباً مساوی ہے اور ع خود بہت چھوٹا نہیں ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ط کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ ط = ۲ جب ط، اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارہی جدول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۶۔ رشتہ  $a = b$  جب  $a$  میں جہاں  $a$  اور  $b$  ایک دوسرے کے لحاظ سے منفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ  $a$  کی ہر قیمت کے جواب میں  $a$  کی قیمتیں ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ  $a$  اور  $b$  دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں  $a$  کی قیمتیں ہیں۔

۳۷۔ یہ مانکر کہ اگر ع وہ حادہ زاویہ ہو جس کی جیب  $\frac{3}{4}$  ہے جب ع کو  $\frac{3}{4}$  ہونا چاہیے ثابت کرو کہ جم ع۔ جم  $\frac{11}{4}$  کا اضافہ  $\frac{3}{4}$  پر ..... سے کم ہے۔

# نَوَاں بَابُ

## مثلی جدولیں

(189)

۱۰۔ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں

کے حل میں اور عددی اعمال میں علامت مفید ہونے کیلئے یہ ضروری ہے کہ چارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعل کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کر سکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کر سکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارٹری جیب، جیب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارٹم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتے ہیں۔

۱۱۔ لوکارٹوں کو پہلے "مضوی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے ممبری اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

موخر الذکر جدولیں اکثر علی مقاصد کے لیے استعمال ہوتی ہیں، اس قسم کی تقریباً تمام جدولوں میں تمام لوکارتوں کو بقدر ۱۰ کے بڑا دیا جاتا ہے اور اس طرح منفی لوکارتوں کے استعمال سے اجتناب کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ اضافہ شدہ لوکارتوں کو جدولی لوکارت کہتے ہیں اور ان کو لکھا جاتا ہے یوں ل جب ۲۰، اس لیے ل جب ۲۰ = ۱۰ + لوک جب ۲۰

## طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا

۱۰۲۔ ہم اول یہ بتائینگے کہ طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں کس طرح محسوب کی جاتی ہیں جن سے ان تفاعلوں کی قیمتیں، صفر سے ۹۰ تک آیا ۱۰ کے وقفوں سے تمام زاویوں کے لیے، اعشاریہ کے چند خاص مقررہ مقامات تک صحیح طور پر معلوم ہونگی۔ ہم پہلے آ اور ۱۰ کی جیب اور جیب التمام محسوب کریں گے۔  
(۱) جب آ، جم ا معلوم کرنا۔

(140)

فرض کرو  $\text{ط} = \frac{\pi}{40 \times 180}$ ، آ کے دائری ناپ کو بغیر کرتا ہے، تب

$$\text{ط} = \frac{36131592752589692}{10800} = 3345054884.49795$$

اعشاریہ کے ۵ مقامات تک، اس لیے

$$\frac{1}{4} \text{ ط} = \frac{1}{4} (3345054884.49795) = 836263721.12449$$

اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک۔

اب دفعہ ۹۵ کے مسئلہ کی رو سے جب آ، ط اور ط -  $\frac{1}{4} \text{ ط}$  کے







اور فرض کرو کہ ا کے متواتر ضعیفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے مجموعہ کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جب ن آیا جم ن ا کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے ع ہے اور اس کے جواب میں صحیح قیمت ع + ل ہے تب

$$\text{تب } ع + ل = (۲-ک) (ع-۱ + ل-۱) - (ع-۲ + ل-۲) \\ \text{نیز } ع = (۲-ک) (ع-۱ - ع-۲)$$

جہاں ک، اعشاریہ کے مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو (ک-ک) ع-۱ = ل تو

$$ع = (۲-ک) (ع-۱ - ع-۲) + ل$$

$$\text{اس لیے } ل = (۲-ک) (ل-۱ - ل-۲) - ل$$

$$\text{یا } ل = ل-۱ - ل-۲ - ل، \text{ جہاں } ل = ل + ک ل-۱$$

$$\text{اس کو کھٹا جاسکتا ہے } (ل-۱ - ل-۲) = (ل-۱ - ل-۲) - ل$$

$$\text{پس اسی طرح } (ل-۱ - ل-۲) = (ل-۱ - ل-۲) - ل-۱$$

.....

$$ل-۱ - ل-۲ = ل-۳$$

$$\text{اس لیے } ل-۱ - ل-۲ = ل-۳ - (ل-۳ + ل-۴ + ... + ل-۱)$$

عدد ک ل-۱، بمقابلہ ل-۲ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے ل + ک ل-۱، ل

سے ناقابلِ قدر فرق رکھتا ہے؛ پس عددوں ل-۳، ل-۴، ...، ل-۱ میں سے

ہر ایک، ۱/۲ سے کم ہے اور اس لیے ان کا حسابی اوسط ل-۱، ۱/۲ سے کم ہے اس لیے

$$ل_۱ - ل_۱ = ۱ - ل_۱ = (۱ - ل_۱) ط_۱$$

$$ل_۲ - ل_۱ = ل_۲ - ل_۱ = (۲ - ل_۱) ط_۱$$

$$\dots\dots\dots$$

$$ل_۳ - ل_۱ = ل_۳ - ل_۱ = ط_۳$$

$$ل_۱ = ل_۱ - (ل_۳ + ل_۲ + \dots + ل_۱ - ط_۱)$$

(142)

اب چونکہ ط\_۳، ط\_۲، ... ط\_۱ میں سے ہر ایک پُر سے کم ہے اس لیے

$$-(ل_۳ + ل_۲ + \dots + ل_۱ - ط_۱) > \frac{ل_۱(۱ - ل_۱)}{۱۰}$$

$$ل_۱ > \frac{ل_۱}{۱۰} + \frac{ل_۱(۱ - ل_۱)}{۱۰ \times ۲}$$

یعنی

$$ل_۱ > \frac{ل_۱}{۱۰} + \frac{ل_۱}{۱۰ \times ۲} \dots\dots\dots (۴)$$

اگر اس ضابطہ میں رکھیں  $ل_۱ = ۱۲$ ،  $ل_۲ = ۱۰۸۰۰$  تو

$$ل_۱ > \frac{۱۰۸}{۱۰} + \frac{۵۸۳۲}{۱۰ \times ۲}$$

$$ل_۱ > ۱۰۸ + ۵۸۳۲$$

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (۲-۳) صفر ہیں؛ اس لیے اگر  $ل_۱ = ۱۵$  تو ل\_۱ > ۵۸۳۲ + ۱۰۸  
 یعنی ۵ اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب  $۱۰۸ \times ۱۰ = ۱۰۸۰$  اس لیے ۲۰ کی  
 جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ۱۰ کے مضبوطی کے ذریعے ۲۰ تک  
 کی جیب یا جیب التمام کے محسوس کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے سات مقامات نہیں۔ ضابطہ  
 (۴) ایسی صورتوں میں مدد رکھتا ہے کہ ل\_۱ اعشاریہ کے سات مقامات کی ایک  
 خاص قدر تک صفر ہو سکے۔

۱۔ اس کا مکمل برعکس (Berret) کی رکنویٹری سے لیا گیا ہے۔

## مثال

ثابت کرد کہ ۱۰ کے ضلعوں کے ذریعے ۹۰ تک کی جیب اور جیب التمام کو اعشاریہ کے ۱۰ صیغ معات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ جم ۱۰، ۱۰، ۱۰ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ معات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عمل حساب میں اعشاریہ کے ۱۲ معات رکھے جائیں۔

۱۰۵۔ جب ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام کی جدول درکار ہو جو ۱۰ کے یا ۹۰ کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۱۰ تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۱۰ سے ۹۰ تک کے زاویوں کی جیب اور جیب التمام کی قیمتیں مضابطہ

$$\text{جب } (۱۰ + ۲۰) + \text{جب } (۲۰ - ۱۰) = \text{جم } ۱۰$$

$$\text{جم } (۲۰ - ۱۰) - \text{جم } (۱۰ + ۲۰) = \text{جب } ۱۰$$

کے ذریعے ۱۰ کو ۹۰ تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۹۰ تک کے زاویوں کی جیب اور جیب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۹۰ اور ۹۰ کے درمیان کے زاویوں کی جیب اور جیب التمام مضابطہ

$$\text{جب } ۱۰ = \text{جم } (۱۰ - ۹۰)$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۹۰ سے آگے کے زاویوں کے لیے عمل حساب کو جلدی رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائری تقاطعوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا

ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیب

ماسوں اور تقاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۴ء میں اس کے انتقال

کے بعد شائع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی کی (Almagest) میں وتروں

کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے ہے جدول

کے ضلعوں پر تلخیصی معلومات ہٹن (Hutton) کی مہٹری آن میتامیٹیکل ٹریس

۱۰۶۔— سچلے طریقہ سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی محسوب کردہ قیمتوں کی صحت کی تصدیق کرنے کے لیے طریقوں کا معلوم کرنا ضروری ہے، یہ تصدیق حسب ذیل ذرائع سے بہ عمل لائی جا سکتی ہے

$$\text{جم} (۱ + \sqrt{۲}) + \text{جم} (۱ - \sqrt{۲}) = \text{جم} ۱ + \text{جیب} (۱ + \sqrt{۲}) + \text{جیب} (۱ - \sqrt{۲})$$

$$\text{جیب} ۱ = \text{جیب} (۱ + \sqrt{۲}) - \text{جیب} (۱ - \sqrt{۲}) + \text{جیب} (۱ - \sqrt{۲}) - \text{جیب} (۱ + \sqrt{۲})$$
 (یہ دو ضابطے یوں رکھے ہیں)

جم ۱ = جب (۱ + ۵۴) + جب (۱ - ۵۴) - جب (۱ + ۱۸) - جب (۱ - ۱۸) (۱-۱۸)  
 (یہ لمبھڑ کا ضابطہ ہے) تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان مثلثات میں تقاطعوں کی حامل کردہ قیمتیں درج کی جائیں۔

## ماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷ — ماسوں کی جدول بنانا ہو تو ہم تک کے زاویوں

کے ماس، ضابطہ مس ۱ = جب ۱ کے ذریعے جویب اور جویب التمام کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۵۴ سے ۹۰ تک کے زاویوں کے ماس کا گنتی کے ضابطے

$$\text{مس (۱ + ۵۴)} = ۲ \text{ مس } ۱۲ + \text{مس (۱ - ۵۴)}$$

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التماموں کی جدول ضابطہ قم ۱ = مس ۱ + مم ۱ کے ذریعے اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ۱ = مس ۱ + مس (۵۴ - ۱) کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں۔

## سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا

۱۰۸ — زاویوں کی جویب اور جویب التمام کو خوب کرنے کا ایک جدید طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرنے کا ہے؛ اگر ہم رکھیں  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  تو

$$\text{جب } \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \dots$$

جم (رکب  $\times$  ۹۰) = ۱ -  $\frac{1}{12}$  (رکب  $\times$   $\frac{\pi}{2}$ ) +  $\frac{1}{2}$  (رکب  $\times$   $\frac{\pi}{4}$ ) - .....  
 اس طرح ہیں حاصل ہوتے ہیں مضابطے

رکب	۱۳	۲۱۹۲۳	۹۴۸۹۶	۶۳۲۶۶	۱۵۵۰۰۹
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۵۸	۲۵۲۶۵	۰۶۲۴۶	۳۰۹۶۵
رکب	۰۵	۰۳۵۱۲	۴۶۱۶۶	۲۶۲۶۲	۰۰۰۹۶۹
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۰۶	۶۸۸۱۰	۲۵۳۱۸	۱۵۵۴۸
رکب	۱۹	۲۵۹۸۲	۸۴۶۸۶	۰۴۴۱۱	۰۰۰۰۱۶
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۵۳	۲۱۲۰۸	۴۳۲۳۵	۳۵۹۸۸
رکب	۹۳	۲۱۹۶۴	۲۱۶۲۹	۰۰۵۶۹	۰۰۰۰۰۰
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۱۱	۵۱۰۹۸	۶۸۸۰۳	۰۰۰۰۰۰
رکب	۱۱	۹۳۵۶۳	۰۹۰۶۶	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۲۷	۶۷۰۶۵	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰
رکب	۲۳	۲۵۶۱۳	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰
جم (رکب $\times$ ۹۰)	-	۲۹	۰۰۱۲۵	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰
رکب	۵۲	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰	۰۰۰۰۰۰



## لوکارتمی جدولیں

۱۰۹۔ جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہو جائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی محسوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملیگا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں اجمع کرو تو متناظر جدولی لوکارتم مل جاتا ہے۔ لوکارتمی ماس رشتہ  $ل م س = ۱۰ + ل جب ا - ل جم ا$  کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی ماسوں کی ایک جدول تیار ہو سکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور ماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

## مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰۔ مثلثی جدولیں، لمبی یا لوکارتمی، جو جب ذیل بنائی جاتی ہیں۔  
(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰ کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے تجاوز مقداروں کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔  
(۲) ان جدولوں سے صفر سے ۵۴ تک اور ۴۵ سے ۹۰ تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراءت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام جیب، جیب التمام، ماس اور سینر درجے ( $۴۵^\circ$ ) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں اور متناظر قیمتے اور نائے دائیں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں؛ زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں۔ نیز جیب التمام، جیب، ماس التمام اور درجے ( $۴۵^\circ$ ) صفحہ کے پائین پر ان ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں۔







جس میں قطر کی پیمانی پر جیب، جیب التمام، ماس کھسے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے ستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوتے ہیں جو مکمل الذکر زاویوں کے مکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ موخر الذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے طور پر اوپر کیلٹ (Callet) کے سات ہندسی لوکار تھی جدولوں کے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثلاً جس ستون کے سرے پر جیب التمام لکھا ہے اس کی تیسری سطر سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ۱۰۶۰۱۲، ۹۷۹، ۵۰۹، ۲۰ کی جدولی لوکار تھی جیب التمام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، مکمل زاویے ۲۰° ۹' ۲۰" کی لوکار تھی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکار تھی جیب اور ماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکار تھی جیب التمام اور ماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱۔ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی مقدار دو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعل کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کریں گے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں

کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکار تھی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے تناسب ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر دو متصل جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ۴ ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰ کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی

قیمت اور اس سے بقدر ما بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق پڑے ہوگا؛ زاویہ میں ۱۰ اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ۷ ہے اور اس لیے زاویہ میں ما ( $> 10$ ) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ۷ کی وہ کسر ہے جو ما کو ۱۰ کے ساتھ ہے۔ یعنی پڑے کیلٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصل لوکارٹوں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اُس ستون میں دیے گئے ہیں جس کے سرے پر فرق لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمیں ۱، ۲، ۳ کی قیمت معلوم کرنی ہے،  
جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

لجب ۱۰۰۰ = ۳۲۸ ۲۵ ۳۸ ۹

[illegible]

فرق = ۶۵۴

تب  $\frac{3}{4} \times 65 = 196.25$  ، اس لیے پہلے لوکارم میں ہیں  $196.25 \dots$  جمع کرنا چاہیے ، اس طرح ہیں حاصل ہوتا ہے

ل جب ۱۰، ۱۳ = ۲۲ ۵۵ ۸۹ ۱۴۹

نیز فرض کرو کہ ہیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جدولی لوکارتمی  
ماس ۳۲.۸۲۰۹۵ ہے۔ جدول میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکارتم  
۳۲ کے دو لوکارتموں کے درمیان واقع ہے۔

مس ۱۷۱۰۸۱۹ = ۹۵۰۸۱۹

٩٥٥٠٨٢٥٢٠ = ٥٠ ٥١ ١٤ مس

فرق = ۷۲۱

دیے ہوئے لوکا جی ماس اور جیدل سے مائل شدہ پہلے لوکا جی ماس کے درمیان فرق ۲۱۳ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۱۰۱۵° ۱۵' ۴۰" میں جمع کرنا چوگا  $\frac{213}{1015} \times 10 = 2.1$  (تقریباً) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۱۰۱۵° ۱۵' ۴۰" تقریباً۔

## متناسب اجزاء کا اصول

۱۱۲۔ اب ہم اس امر کی تحقیق کر چکے کہ متناسب اضافہ کا اصول جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں تک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعمیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی لمبی یا کوئی ترقی تفاعل تعمیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتائیں گے کہ اگر وہ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لا میں جمع کیا جائے تو

$$ف (لا + ہ) - ف (لا) = ہ ف (لا) + ہ$$

جہاں ف (لا) لا کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور ہ وہ تفاعل ہے جو محدود رہتا ہے جبکہ ہ =

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہ کافی چھوٹا ہو تو لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ف (لا + ہ) - ف (لا) کے متناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم ہ اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اس تعداد تک جو جدول میں درج ہے اثر انداز نہ ہوگا، پس لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

$$ف (لا + ہ) - ف (لا)$$

اعشاریہ کے مقامات کی جدولی تعداد تک مستقل ہے۔ تاہم دو مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں۔

(۱) اگر لا ایسا ہو کہ ف (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے لہذا اس رتبہ کے جو جدولوں میں درج ہے، تب فرق ف (لا + ہ) - ف (لا) کو ناقابل قدر (Insensibie) کہتے ہیں اور



$$\text{نیز } \frac{\text{مس (لا + ح) - مس لا} = \frac{\text{جب ح}}{\text{جم لا جم (لا + ح)}} \dots\dots$$

$$= \frac{\text{جم لا - ح جب لا جم لا}}{\text{}}$$

یا تقریبی طور پر

$$\text{مس (لا + ح) - مس لا} = \text{ح قطا لا} + \text{ح قطا مس لا} \dots\dots (۳)$$

$$\text{نیز } \frac{\text{ل جب (لا + ح) - ل جب لا} = \text{لوک جب (لا + ح)}}{\text{جب لا}} \quad (149)$$

$$= \text{لوک (۱ - } \frac{1}{p} \text{ ح}^2 + \text{ح مم لا)}$$

$$\text{یا } \frac{\text{ل جب (لا + ح) - ل جب لا} = \text{ح مم لا} - \frac{1}{p} \text{ ح}^2 \text{ قما لا} \dots\dots (۴)$$

$$\text{اسی طرح ل جب (لا + ح) - ل جب لا} = \text{ح مم لا} - \frac{1}{p} \text{ ح}^2 \text{ قطا لا} \dots\dots (۵)$$

$$\text{ل مس (لا + ح) - ل مس لا} = \frac{\text{ح}}{\text{جب لا جم لا}} - \frac{2}{p} \text{ ح}^2 \text{ جم لا} \dots\dots (۶)$$

ہر صورت میں ہم نے س کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے۔ یعنی ہم نے وہ رقیں چھوڑ دی ہیں جن میں ح کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں شامل ہوتی ہیں۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ح کافی چھوٹا ہے تو فرق، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ح کے تناسب ہیں۔ حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) فرق، جب (لا + ح) - جب (لا) ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ح جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ  $\frac{1}{p}$  جب لا، ح جم لا کے ساتھ مقابلہ نہیں ہو سکتا ہے۔

(۲) فرق، جم (لا + ح) - جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔

(۳) فرق، مس (لا + ۵)۔ مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ۵ قطا لا مس لا، ۵ قطا لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۴) فرق، ل جب (لا + ۵)۔ ل جب لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا چھوٹا ہو اور ناقابل قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۵) فرق، ل جم (لا + ۵)۔ ل جم لا، ناقابل قدر اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۶) فرق، ل مس (لا + ۵)۔ ل مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔  
یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق ناقابل قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔

تقرب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک متناسب اجزاء کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ سر کی اصلی قیمت پر عزیز کیا جائے؛ جب (لا + ۵)۔ جب لا کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے۔  $\frac{1}{10}$  جب (لا + ۵) جہاں طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول ۱۰ کے وقفوں پر بنائی گئی ہے تو  $\frac{1}{10}$  کی بڑی سے بڑی قیمت ہے  $\frac{1}{10} \left( \frac{3.14159}{18 \times 40 \times 40} \right)$  یا  $\frac{1}{10} (5.0000)$ ؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے

آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ مس (لا + ۵)۔ مس لا کی صورت میں خطا ہے

(5.0000) قطا (لا + ۵) مس (لا + ۵)

پس اگر مس ۵ + مس ۲۰۰۰۰ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع



کر گئی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خلسا نہ ہوگی  
اگر لا < ۵۔

۱۱۴۔ جب ایک تفاعل کے فرق اعشاریہ کے اتنے مقامات  
تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے  
یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم  
اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں  
استعمال نہیں کر سکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت  
سے لامتین نہیں کر سکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں  
کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لامتین نہیں کر سکتے۔ جب ایک تفاعل کے  
فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو متناسب اجزاء کا مذکورہ بالا  
تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی قیمتیں کے لیے کافی نہیں ہے اور نہ  
زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی قیمتیں کے لیے کافی ہے؛ مثلاً متقرب ناقابل  
قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو  
ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،  
ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی۔  
ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر  
نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جاسکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک  
دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہو سکے یا ایک دیے ہوئے  
زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکے۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے  
وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی  
ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۱۰۰ کے قریب کے چند  
زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال  
کر سکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں مناسب اجزاء کا اصول استعمال کر سکتے ہیں۔

## (۲) ڈیمبر کا طریقہ

اس طریقہ میں  $\angle$  جب  $\angle$  یا  $\angle$  مس لا کو ایسی دو رقوموں کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق ناقابل قدر ہوتے ہیں لا کی اُن قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے اور دوسری رقم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ ان رقوموں میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق ناقابل قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ  $\angle$  کا دائری ناپ لا ہو تو

$$\angle \text{ جب } \angle = (\text{لوک جب } \angle + \angle \text{ عا} + \text{لوک } \angle)$$

$$\angle \text{ مس } \angle = (\text{لوک مس } \angle + \angle \text{ عا} + \text{لوک } \angle)$$

جہاں  $\angle$  کا دائری ناپ ہے۔

$$\text{اب } \text{لوک } (\angle + \angle) - \text{لوک } \angle = \text{لوک } (\angle + \angle)$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \dots$$

اس لیے لوک  $\angle$  کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر  $\angle$  بمقابلہ  $\angle$  کے چھوٹا ہو۔ نیز لوک  $\angle$  جب  $\angle$  کے لیے فرق ناقابل قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک جب } (\angle + \angle) - \text{لوک جب } \angle = \text{لوک جب } (\angle + \angle) - \text{لوک } \angle$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \dots$$

$$= \frac{\angle}{\angle} - \frac{\angle}{\angle} + \dots$$

اور

$$\text{لوک مس } (لا + م) - \text{لوک مس } لا$$

$$= (جبا لا جم لا - \frac{1}{لا}) + \frac{2م}{۷} - (جبا لا جم لا + \frac{1}{لا})$$

ان میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ م کا سر صیوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔  
اگر لوک جب لا + ل م، لوک مس لا + ل م کی قیمتوں کی جدولیں  
ریج کے پہلے چند درجوں تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو  
عددوں کے طبعی لوکارتوں کی جدولوں کے ساتھ ن کو ٹھیک طور پر  
معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں جبکہ ل جب ن یا ل مس ن  
دیا گیا ہو، یا بالعکس۔

اگر ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت  
معلوم کرو، پھر جدول سے لوک جب لا + ل م یا لوک مس لا + ل م  
کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب  
لوک ن اس قیمت

$$ل جب ن - (لوک جب لا + ل م)$$

$$ل مس ن - (لوک مس لا + ل م)$$

(۱) سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارتوں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک  
معلوم کر لیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک جب لا + ل م  
کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب ن کو مضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

کا طریقہ۔

(Maskelyne)

(۳) میا سکلیمن

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھڑا زاویہ ہو تو

$$\text{جب لا} = ۱ - \frac{۲}{۹} = (۱ - \frac{۲}{۹}) = \frac{۷}{۹} = \text{جم لا، تقریباً}$$

اس لیے لوک جب لا = لوک لا +  $\frac{۱}{۹}$  لوک جم لا  
اب چونکہ لا ایک چھڑا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق تا قابل قدر ہیں؛  
اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر  
لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے  
ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال  
کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر لا دیا  
گیا ہے تو ہم لمبی لوکار تہوں کی جدول سے لوک لا ٹیک ٹیک  
معلوم کر سکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ  
سے لوک جب لا مل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ  
لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا -  $\frac{۱}{۹}$  لوک جم لا سے  
حاصل ہو سکتا ہے۔

## مثال

ثابت کر دو کہ ضابطہ ذیل میا سکیں کے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔  
لوک جب ط = لوک ط -  $\frac{۱}{۹}$  لوک جم ط +  $\frac{۱}{۹}$  لوک جم ط

## لوکار تہی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو

### موزوں بنانا

۱۱۱۔ کسی جگہ پر ایسی شکل میں تحول کرنے کے لیے کہ لوکار تہوں  
کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جا سکیں ایسے بدلات



- راج\۱ مس ط - راج\۱ مم ط

جہاں جب ۲ ط = ۲ راج\۱ اور اس لیے اصلیں کو کارتی جدولوں کے ذریعہ محسوب کی جاسکتی ہیں۔

اگر راج مختلف العلامت ہوں تو ہم دو درجی کو لا + ب لاج = لے سکتے ہیں؛ اس صورت میں رکھو لا = راج\۱ اور تو دو درجی

$$ما + ب با\۱ راج - ۱ = ۰$$

میں تحول ہوتا ہے۔ اس مساوات کا مقابلہ مساوات

$$مس ط + ۲ مم ط مس ط - ۱ = ۰$$

کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مس ط = ۲ راج\۱ وب  
تو لا میں دو درجی مساوات کی اصلیں ہیں راج\۱ و مس ط اور راج\۱ و مم ط۔  
۱۱۔ کعبی لا + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں محسوب کرنا جبکہ  
اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں۔

$$مساوات جب ط - ۳ جب ط + ۱ جب ۳ ط = ۰$$

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ما - ۱ ق ق تو لا میں جو کعبی مساوات ہے وہ

ہو جاتی ہے

$$ما - ۲ + ر (- ۳ ق) = ۰$$

یہ مساوات وہی ہوگی جو جب ط کی مندرجہ بالا مساوات ہے اگر

$$جب ۳ ط = ۳ ر (- ۳ ق) = ۱ (- ۳ ق) = ۱$$

اس لیے لا کی قیمتیں ہیں،

$$ما - ۳ ق جب ط - ۱ ق جب (ط + ۲) - ۱ ق جب (ط + ۳) = ۱$$

(154) وہ شرط کہ کبھی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یہ ہے کہ جب  $m$  طے آئے  
ہم کسی آئندہ باب میں دو خیالی اصولوں والی کبھی مساوات کی اصلیں  
دریافت کرنے کا طریقہ بیان کریں گے۔

وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجی اور کبھی مساواتوں کو حل  
کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو درجی مسئلے فی الواقعہً ان ہندسی مسئلوں کے  
مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنصیف و تثلیث سے متعلق ہیں۔  
اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجی مساوات صرف پٹری اور پرکار  
کی مدد سے تریسیمی طور پر حل کی جاسکتی ہے لیکن کبھی مساوات ان کی مدد سے  
تریسیمی طور پر بالعموم حل نہیں ہو سکتی کیونکہ یہ آئے ایک زاویہ کی تثلیث کے  
ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔

# دسواں باب

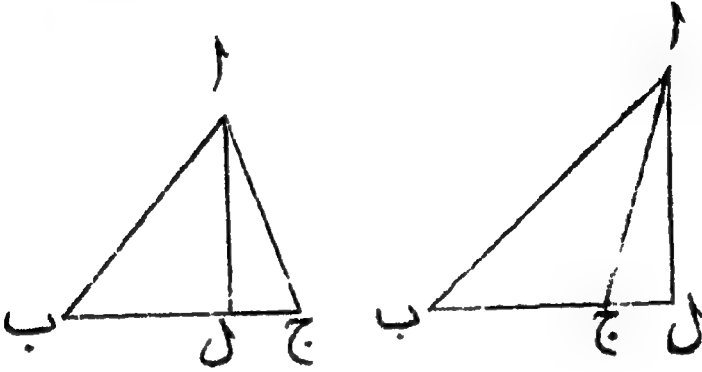
(155)

## مثلث کے ضلعوں و زواویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زواویوں ب ا ج، ج ا ب، ج ب ا کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف ا، ب، ج سے تعبیر کریں گے اور ضلعوں ب ا ج، ج ا ب، ج ب ا کے طویل کو علی الترتیب چھوٹے حروف ا، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کریں گے جو مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو زواویوں کے دائری تفاعلوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ ان ضابطوں سے ان طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو ان مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزاد یے جاتے ہیں۔

۱۱۹۔ ظلوں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پ ب ا، ج ا، ج کے ظلوں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پ کے ایک مود پر ان کے ظلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرنے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ج بناتی ہے اس لیے





$$\begin{aligned} \text{ب.ا.جم} &= \text{ب.ج.جم} + \text{ا.ج.جم} = \text{ا.} \\ \text{ج.جم.ب} &= \text{ب.جم.ب} + \text{ب.جم.ج} = \text{ا.} \\ \text{ب.ا.جم.ب} &= \text{ا.ج.جم.ب} - \text{ا.ج.جم.ج} = \text{ا.} \\ \text{ج.جم.ب.ا} &= \text{ب.جم.ب.ا} - \text{ب.جم.ب.ج} = \text{ا.} \end{aligned}$$

یا  
اور  
یا

$$\text{جس کو لکھا جاسکتا ہے } \frac{\text{ب}}{\text{ج.جم.ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ج.جم.ج}} \quad (150)$$

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے غمو دوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں ان کو اور منسلک بالا رشتوں کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\left\{ \begin{aligned} \text{ا} &= \text{ب.جم.ج} + \text{ج.جم.ب} \\ \text{ب} &= \text{ج.جم.ا} + \text{ا.جم.ج} \\ \text{ج} &= \text{ا.جم.ب} + \text{ب.جم.ا} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\text{ج.ا.جم} = \frac{\text{ب}}{\text{ج.جم.ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ج.جم.ج}} \quad (2)$$

مساداتوں (۲) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰۔ رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔  
 مثلث ۱ بج ج کا حاکم دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر  $r$  ہے، تب ضلع بج ج  $= ۲ \times$  دائرہ کا نصف قطر  $\times$  اس زاویے کے نصف کی جیب جو بج ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنی  $\text{بج ج} = ۲r \text{ جب } ۱ \text{ یا } ۲r \text{ جب } (۱۸۰-۱)$   
 پس  $r = \frac{\text{بج ج}}{۲}$   
 اسی طرح  $r = \frac{\text{بج ج}}{۲}$   
 اور  $r = \frac{\text{ج ج}}{۲}$

اس لیے  $\frac{1}{\text{ج ج}} = \frac{1}{\text{بج ج}} = \frac{1}{\text{ج ج}} = \frac{1}{r}$   
 رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں کو مثل

۱۔ ب ج ج - ج ج ج = ۰  
 ۲۔ ج ج ج + ب ج ج = ۰  
 میں رکھنے سے ہم  $\frac{1}{\text{ب ج ج}}$  کی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{\text{ج ج ج}} = \frac{1}{\text{ب ج ج}} = \frac{1}{\text{ج ج ج}}$   
 اس لیے  $\frac{1}{\text{ج ج ج}} = \frac{1}{\text{ب ج ج}} = \frac{1}{\text{ج ج ج}}$   
 یعنی  $\frac{1}{\text{ج ج ج}} = \frac{1}{\text{ب ج ج}} = \frac{1}{\text{ج ج ج}}$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$\frac{1}{\text{ج ج ج}} = \frac{1}{\text{ب ج ج}} = \frac{1}{\text{ج ج ج}}$

اس لیے کہ جب ب ج + ج ب = ج ج، جم ب ج = ب جم ج + ج تم ب  
جوشتوں (۱) میں سے پہلا رشتہ ہے۔ بالکل اسی طرح دیگر دو رشتے اخذ کیے  
جاسکتے ہیں۔

اگر ہم (۱) کی تین مساواتوں سے 'ا' ب' 'ج' کو ساقط کریں تو ہمیں ثلثہ حاصل ہوتا ہے

ج۱ + ج۲ + ج۳ + ج۴ + ج۵ = ۱  
جوشلٹ کے زاویوں کی جیب التماموں کے درمیان درست رہتا ہے۔  
۱۲۱۔ اگر ہم مساواتوں (۱) کو علی الترتیب - 'ا' سے ضرب دیں اور پھر انہیں جمع کریں

تو بنا ج-۱۔ ۱ = ۲ ب ج جم ا  
جس سے ایک زاویے کی جیب التمام کے لیے ضلعوں کی رقوم میں  
ایک جملہ حاصل ہوتا ہے، اس ربط کو مع اُن دو ربطوں کے جو ج ب  
اور ج ج کے لیے ہیں اس طرح لکھا جاسکتا ہے

(۳) ..... { 
$$\begin{aligned} \text{وا} &= \text{با} + \text{ج} - \text{ب} \\ \text{با} &= \text{ج} + \text{وا} - \text{ج} \\ \text{ج} &= \text{وا} + \text{ب} - \text{ب} \end{aligned}$$

۱۲۲۔ ہم ان رشتوں (۳) کو اقلیدس جلد دوم مسائل ۱۲ اور ۱۳ کی مدد سے بالراست اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر آل' ب ج پر عمود ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے  
 $ا ب^2 = ا ج^2 + ب ج^2 - ۲ ب ج \times ج ل$   
 جبکہ زاویہ ج حادہ ہو، اور

اب = اج + ب ج + ۲ ب ج + ج ل  
 جبکہ زاویہ ج منفرج ہو۔ پہلی صورت میں  
 ج ل = اج + جم ج

اور دوسری صورت میں

$$ج ل = ا ج جم (ا - ج) = - ا ج جم ج$$

اس لیے ہر دو صورتوں میں

$$ج = ا + ب - ۲$$

رشتوں (۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$جم = \frac{ب + ج - ۲}{ب ج}$$

$$اس لیے ج ا = \frac{۲ ب ج - (ب + ج - ۲)}{۲ ب ج} = \frac{۲ ب ج + ۲ - ب - ج}{۲ ب ج}$$

$$یا ج ا = \frac{(۱ + ب + ج)(ب + ج - ۱)(ب + ج - ۱)}{(۱ + ب + ج)(ب + ج - ۱)(ب + ج - ۱)}$$

پس ا سے تقسیم کرنے سے ج ا = ۱ حسب ذیل قضاائل جملے کے مساوی ہے

$$\frac{(۱ + ب + ج)(ب + ج - ۱)(ب + ج - ۱)}{(۱ + ب + ج)(ب + ج - ۱)(ب + ج - ۱)}$$

$$اس لیے ج ا = \frac{ج ب}{ج} = \frac{ج ب}{ج}$$

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱)، کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو ج تقسیم کر دو اور پھر انہیں جمع کر دو تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱ + ب}{ج} = ۲ ج + \frac{۱ + ب}{ج} - (ب جم + ا جم ب)$$

(158)

$$ج = ب جم + ا جم ب$$

۱۲۳ — ہم جانتے ہیں کہ

$$ج ا = ۱ = \frac{۱}{ب} (۱ - ج ا) جم = ۱ = \frac{۱}{ب} (۱ + جم ا)$$

اس لیے

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \right) \frac{1}{2} = 1 + \frac{a^2}{2c^2}$$

$$\frac{(ج+ب-ا)(ج-ب+ا)}{ج ب ا} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-j+b)(j+b+1)}{2-b} = 2 \frac{1}{2}$$

اب فرض کرو  $۲س = ل + ب + ج$  تو  $۲(س - ل) = ب + ج - ل$  اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{p} = 1 \quad \frac{(s-b)(s-j)}{bj} \quad \text{م } \frac{1}{p} = 1 \quad \frac{s(s-l)}{bl} ;$$

اس لیے جب  $\frac{1}{f} = 1$   $\left\{ \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \right\}$  جم  $\frac{1}{f} = 1$   $\left\{ \frac{s(s-a)}{bc} \right\}$

$$(م) \dots\dots\dots \left\{ \frac{(س-ب)(س-ج)}{س(س-د)} \right\} = 2\frac{1}{2} \text{ مس}$$

ان مضابطوں کے ذریعے زاویوں کے تفاعل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت مضابطوں (۲) کے، کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوکار تہی اعمال حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے۔

۱۲۴۔ چونکہ  $\frac{\text{بیب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ببج}}{\text{ج}}$  اس لیے

$$\frac{\text{جب} \pm \text{ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{جب} \pm \text{ج}}{1} \text{ یا } \frac{\text{جب} \pm \text{ج}}{1} = \frac{\text{جب} \pm \text{ج}}{\text{ج}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ب+ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب-ج})}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب+ج})} \text{ اور}$$

$$\frac{\text{ب-ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب-ج})}{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب+ج})}$$

$$\text{یا } \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب-ج})} = \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب+ج})} = \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب-ج})} = \frac{\text{و}}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ب+ج})} \text{ ..... (۵)}$$

اس لیے عمل تقسیم سے ضابطہ حاصل ہوتا ہے

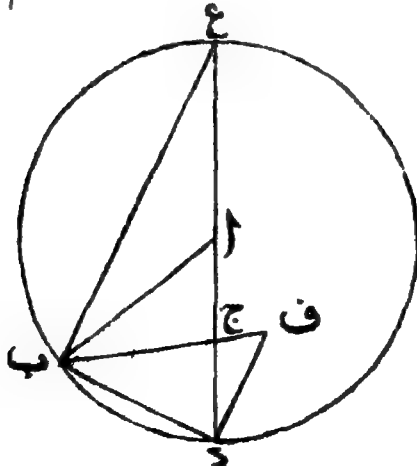
$$\text{مس } \frac{1}{2} (\text{ب-ج}) = \frac{\text{ب-ج}}{\text{ب+ج}} \text{ مم } \frac{1}{2} \text{ ..... (۵)}$$

ان ضابطوں کو ہندسی طور پر ثابت کرنے کے لیے مرکز ا اور نصف قطر اب کے ساتھ ایک دائرہ کھینچو جو اج کو د اور ع پر قطع کرے، د ف، ب ع کے متوازی کھینچو، تب

$$\text{ج ع} = \text{ب+ج}، \text{د ج} = \text{ب-ج}، \text{د ع} = \text{ب} = \frac{1}{2} \text{ اور}$$

$$\text{د ب ف} = \text{ج} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{ب}، \text{اب چونکہ}$$

$$\text{ج د ج ب ب} = \frac{\text{ج ب ب}}{\text{ج ب ع د ب}} \text{ یا } \frac{\text{ب-ج}}{\text{و}} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ب-ج})}{\text{جم} \frac{1}{2} \text{ ..... (۵)}}$$



$$\text{اور نیز } \frac{ج+ب}{ج-ب} = \frac{ج}{ج-د} = \frac{ع}{د-ب} = \frac{ب+د}{ب-د}$$

$$= \frac{م}{م-ب} = \frac{م}{م-ج}$$

$$\text{اس لیے } م \div (ب-ج) = \frac{ب-ج}{ب+ج} م \div ۱$$

## مثلث کا رقبہ

۱۲۵ — کسی مثلث کا رقبہ اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع  $۱$  قاعدہ ہو تو ارتفاع  $ب$  جب  $ج$  یا  $ج$  جب  $ب$  ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہیں حسب ذیل جملے ملینگے۔

$$\frac{۱}{۲} \times ب \times ج \text{ اور } \frac{۱}{۲} \times ج \times ب$$

پس مثلث کا رقبہ  $= \frac{۱}{۲} \times$  کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب  $\times$  ان کے درمیانی زاویہ کی جیب

یعنی مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب  $۱$  کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنی

$$\frac{۱}{۲} (ب+ج) (ب-ج) (ب+د) (ب-د) (ج+ب) (ج-ب) (ج+د) (ج-د) (د+ب) (د-ب) (د+ج) (د-ج)$$

استعمال کرتے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہیں یہ جملہ

$$\frac{۱}{۲} (ب+ج) (ب-ج) (ب+د) (ب-د) (ج+ب) (ج-ب) (ج+د) (ج-د) (د+ب) (د-ب) (د+ج) (د-ج)$$

یا اس (س-ا) (س-ب) (س-ج) ..... (۶)

ملاحظہ ہے۔ اسکندریہ کے ہیریڈ نے یہ ضابطہ تقریباً ۱۵۰ سال قبل م میں حاصل کیا تھا۔ اس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{ج ۲}$$

## مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

(160)

۱۲۶۔ اب ہم ان رشتوں کی تحقیق کریں گے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزاء کی پیمائش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دیگر تین اجزاء اس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے، تب ان اجزاء کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوتے ہیں ان کی مدد سے ہم یہ معلوم کر سکیں گے کہ قبل الذکر اجزاء کی پیمائش میں چھوٹی خطا یا کی موجودگی سے مابعد الذکر تین اجزاء کی قیمتوں میں کیا خطا میں واقع ہوتی ہیں ہم فرض کر لیں گے کہ اضافے اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں  $a, b, c$  ہیں جن میں تین لینے ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمائش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمائش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورہ بالا ضابطوں کے

۱۔ دیکھو بال کی ہٹری آف میاٹھلیکس صفحہ ۸۲ جس میں اس ضابطہ کا اصلی ہندی ثبوت دیا گیا ہے



ذریعہ مربوط ہیں۔ اگر ان پیمائش کردہ اجزائیں کوئی خطا واقع ہوئی ہے تو اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ دیگر تین اجزائی قیمتوں میں جو ضابطوں سے حاصل کی گئی ہیں خطائیں واقع ہونگی۔

فرض کرو کہ زاویوں اور ضلعوں کی صحیح قیمتیں  $A, B, C$  و  $a, b, c$  ہوں۔  
 $A + B + C = 180^\circ$  اور  $a, b, c$  کے درمیان  
 رشتے معلوم کرینگے۔ یہ فرض کرنا سہولت بخش ہوگا کہ زاویوں کے آفاقی  
 دائری ناپ میں پیمائش کیے گئے ہیں، ان کو فوراً ثنائیوں میں تحویل کیا  
 جاسکتا ہے۔

یہیں حاصل ہوتا ہے  $A + B + C = 180^\circ$ ۔

اور  $(A + B + C) = 180^\circ$ ۔  $(a + b + c) = 180^\circ$ ۔  
 اب چونکہ  $A, B, C$  کے مربع نظر انداز ہو سکتے ہیں اس لیے  
 $A^2 + B^2 + C^2 = 180^2$ ۔  $a^2 + b^2 + c^2 = 180^2$ ۔  
 $A + B + C = 180^\circ$ ۔  $a + b + c = 180$ ۔  
 اس لیے  $(A + B + C) = 180^\circ$ ۔  $(a + b + c) = 180$ ۔  
 اس لیے اگر  $A, B, C$  کے حاصل ضرب نظر انداز کیے  
 جائیں تو

$A \times B \times C = 180 \times 180 \times 180$ ۔  $a \times b \times c = 180 \times 180 \times 180$ ۔  
 اسی طرح اور دوسرا تین حاصل ہوتی ہیں اور یہ کل تین مساواتیں اس طرح  
 لکھی جاسکتی ہیں۔

$A \times B \times C = 180 \times 180 \times 180$ ۔  $a \times b \times c = 180 \times 180 \times 180$ ۔  
 $A \times B \times C = 180 \times 180 \times 180$ ۔  $a \times b \times c = 180 \times 180 \times 180$ ۔  
 $A \times B \times C = 180 \times 180 \times 180$ ۔  $a \times b \times c = 180 \times 180 \times 180$ ۔  
 نیز چونکہ

$$\pi = \zeta + \eta + 1$$

اور  $\pi = 1 + \text{مف} + 1 + \text{ب} + \text{مف} + 1 + \text{ج} + \text{مف} + 1 + \text{ج}$

(181)

اس لیے  $\text{مف} + \text{مفب} + \text{مفج} = \dots\dots\dots (۸)$

مساواتیں (۷) ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں جیسا کہ ان کو شکل

$$\frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} - \frac{\text{مف ج}}{\text{ج}} = \text{م ب} \times \text{مف ب} - \text{م ج} \times \text{مف ج}$$

$$\frac{\text{مفج}}{\text{ج}} - \frac{\text{مفج}}{\text{د}} = \text{م ج} \times \text{مف ج} - \text{م د} \times \text{مف د}$$

$$\frac{\text{مف 1}}{1} - \frac{\text{مف ب}}{2} = \text{م م ا} \times \text{مف ا} - \text{م م ب} \times \text{مف ب}$$

میں رکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ ان مساواتوں سے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی ایک مساوات دیگر دو مساواتوں سے اخذ کی جاسکتی ہے۔ پس مساواتوں (۲) میں سے کوئی دو مساواتیں مع مساوات (۸) کے چھ خطاؤں میں سے تین کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں جبکہ دیگر تین خطائیں دی گئی ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک خطا ضلع سے متعلق ہو۔

(۷) اور (۸) سے منف ب اور منف ج کو ساقط کرنے سے ہیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے منف ا حاصل ہوتا ہے منف ب، منف ج، اور منف ا کی رقوم میں؛ اس کو ضابطہ ۱ = ب + ج - ۲ ب ج جم ۱ سے بھی باراست معلوم کیا جاسکتا ہے؛ یہی ہیں حاصل ہوتا ہے

یہ اور اس کے متناظر و مضابطے رشتہ (۱) کی مدد سے ذیل کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔



یہ دور رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = \zeta = \eta = \theta = \iota = \kappa = \lambda = \mu = \nu = \xi = \omicron = \pi = \rho = \sigma = \tau = \upsilon = \phi = \chi = \psi = \omega$  کی پہلی مساوات میں  $\alpha$  کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرفین کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں

$$2 \alpha + 2 \beta + 2 \gamma + 2 \delta + 2 \epsilon + 2 \zeta + 2 \eta + 2 \theta + 2 \iota + 2 \kappa + 2 \lambda + 2 \mu + 2 \nu + 2 \xi + 2 \omicron + 2 \pi + 2 \rho + 2 \sigma + 2 \tau + 2 \upsilon + 2 \phi + 2 \chi + 2 \psi + 2 \omega = 360^\circ$$

جم (۲۰)  $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$

ہوگا  
یعنی  
جم (۲۰)  $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$ ؛  
یہ جیب التمام ہے زاویہ طریس کی جو ضلعوں  $\alpha$  اور  $\beta$  کی مثبت سمتوں کا درمیان  
زاویہ ہے؛ پس یہیں مضابطہ حاصل ہوتا ہے۔  
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega = 360^\circ$$
  
(۱۱)  
جو مضابطہ (۳) کے مثال ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر  $n = 3$  - مضابطہ (۱۱)  
میں  $n$  اور  $s$  غیر مساوی ہیں اور ہر ایک  $n$  سے کم ہے۔

## کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ — کثیر الاضلاع کا رقبہ جملہ

$\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa + \lambda + \mu + \nu + \xi + \omicron + \pi + \rho + \sigma + \tau + \upsilon + \phi + \chi + \psi + \omega)$  (۱۲)  
یا  $\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{2} \zeta + \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \iota + \frac{1}{2} \kappa + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \omicron + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \upsilon + \frac{1}{2} \phi + \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2} \psi + \frac{1}{2} \omega$   
مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں  $n$  اور  $s$  میں سے  $s$  کو

ہمیشہ  $r$  سے بڑا فرض کریں تو زاویہ طریس حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں  
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  کا حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابت کرنے  
 کے لیے ہم پہلے یہ دکھائیں گے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ  
 جملہ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  جب  $\alpha$  میں تحویل ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائیں گے کہ اگر وہ  $n$   
 (ن) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ  $n$   
 ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

مثلث  $\alpha, \beta, \gamma$  کی صورت میں جس میں  $\alpha = \beta = \gamma$  ہیں حاصل ہوتا ہے

(168)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

پس اس صورت میں جملہ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  لڑیں جب طریس

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ  $n = 3$

اب فرض کرو کہ (ن) ضلعوں

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اس کثیر الاضلاع  
 کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لڑیں جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لڑیں جب طریس}$$

جس میں  $r$  اور  $s$  میں سے ہر ایک  $n$  سے کم ہے۔ اب ضلع  $a_1$  کی

جگہ دو ضلع  $a_1, a_2$  رکھو اور اس طرح  $n$  ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع

بناؤ، تب ہیں  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$  جب طریس  $r$  کو رقبہ بالا میں جمع کرنا ہوگا؛ پس

ن ضلعوں والے کثیر الانضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو لیس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لو لیس} = \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس}$$

اب ضلع کا نل کو پر لینے سے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس} = \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس}$$

پس جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} \times \text{لو لیس جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لو لیس} = \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس} + \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس}$$

$$+ \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس} = \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{لو لیس جب طریس}$$

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ  $r > s$ ۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ  $n = ۳$ ، اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ  $n = ۴$ ، اور علیٰ ذہا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الانضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مضابطہ (۱۲) میں  $۱$  کا سر (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے؛ پس مضابطہ ہو جاتا ہے  $\frac{1}{2} \times \text{لو لیس جب طریس} = \frac{1}{2} \times \text{لو جب طریس}$  اور  $۲$  سے  $n$  تک تمام قیمتیں اختیار کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ  $s < r$ ۔

## دسویں باب پر مثالیں

ایک شنت لرب ج کے لیے حسب ذیل رشتے از مثال آتا ۱۱

ثابت کرو:-

(۱)  $\text{اجب (ب-ج)} + \text{ب جب (ج-۱)} + \text{ج جب (۱-ب)} = ۰$

(۲)  $\text{جم } ۱ + \text{جم ب} + \text{جم ج} = \text{جم } (۱ + ۲) \text{ جم ب جم ج}$

$$\left\{ (1-j) + \frac{1}{2} \right\} \frac{1+j}{1-j} = 1 + j + j + j^2 \quad (3)$$

(۴) وجم اجم ۱۲ + بجم بجم ۲ب + ججم ججم ۲ج

۴ جم ا جم ب جم ج (۱ جم ا + ب جم ب + ج جم ج) = .

(۵)  $\text{ا.ج.م.} + (\text{ب.ج.}) = \text{ب.}^2 + \text{ج.}^2 + \text{ب.ج.م.} + \text{ب.ج.م.} = (\text{ب.ج.م.})$

(۶)  $وَجْم(ب-ج) + بَاجْم(ج-۱) + جَاجْم(۱-ب) = ۲ وِجْم(ب-ج)$

$$(6) \quad ج = ج_1 + ج_2 + ج_3 + ج_4 + ج_5 + ج_6 + ج_7 + ج_8 + ج_9 + ج_{10} + ج_{11} + ج_{12}$$

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰۲۱۲۲۲۳۲۴۲۵۲۶۲۷۲۸۲۹۳۰۳۱۳۲۳۳۳۴۳۵۳۶۳۷۳۸۳۹۴۰۴۱۴۲۴۳۴۴۴۵۴۶۴۷۴۸۴۹۵۰۵۱۵۲۵۳۵۴۵۵۵۶۵۷۵۸۵۹۶۰۶۱۶۲۶۳۶۴۶۵۶۶۶۷۶۸۶۹۷۰۷۱۷۲۷۳۷۴۷۵۷۶۷۷۷۸۷۹۸۰۸۱۸۲۸۳۸۴۸۵۸۶۸۷۸۸۸۹۹۰۹۱۹۲۹۳۹۴۹۵۹۶۹۷۹۸۹۹

(۸)  $(\text{م} \frac{1}{2} \text{ا} - \text{س} \frac{1}{2} \text{ب} - \text{م} \frac{1}{2} \text{ج}) + (\text{م} \frac{1}{2} \text{ب} - \text{س} \frac{1}{2} \text{ج} - \text{س} \frac{1}{2} \text{ا})$

$$+ (\text{م} \frac{1}{2} \text{ج} - \text{س} \frac{1}{2} \text{ا} - \text{س} \frac{1}{2} \text{ب}) = (\text{م} \frac{1}{2} \text{ا} + \text{م} \frac{1}{2} \text{ب} + \text{م} \frac{1}{2} \text{ج})$$

$$(9) \quad \text{ب} + \text{ج} - \text{ر} = \text{ب} + \text{ج} - \text{م} = (9 + 1) = 10 \quad \text{ج} - \text{ر} = \text{ج} - \text{م} = (9 + 1) = 10$$

$$= 1 + 2 - 1 \text{ بجم } (ج + 90)$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۱) جم + ب جب (ب + ج) : جم + ج جب (ج + ب)

$$1 + j = j + 1 =$$

(۱۱) (ا + ب) جب ب = ۲ ب جب (ب + ج) جم ج

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اس کے نیم زاویوں کے ماس التمام سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے مربع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کے زاویوں کے ماس سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۴) اگر ب-ا-جم، ا-جم ب، ا-جم ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب ب، ا-جم ب، جب ج سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۵) اگر ب-ا-جم = م ج تو ثابت کرو کہ ا-جم = (م ج) - ج

$$\text{اور } م \frac{1}{2} (ب-ا) = \frac{م+ا}{م ج ب}$$

(۱۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں جم+ا-جم ب+جم ج < ا اور ا < ج

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں م<sup>۱</sup> ب م<sup>۱</sup> ج م<sup>۱</sup> ج م<sup>۱</sup> ج م<sup>۱</sup> ا +

م<sup>۱</sup> ا م<sup>۱</sup> ج > ا اور یہ کہ اگر ایک زاویہ دو قائمہ زاویوں کے لائنیاں قریب آئے تو اس جگہ کی کم سے کم قیمت پڑے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک مثلث متساوی الاضلاع ہوگا اگر م+ا-جم ب+جم ج = م

(۱۹) اگر ایک مثلث میں

$$م \frac{1}{2} (ب+ج) = م+ا-جم ب$$

تو ثابت کرو کہ اس کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

(۲۰) اگر ایک مثلث میں جم+ا-جم ج = م ب م ج = ج

(۲۱) اگر وہ زاویہ ہو جو ج = ج سے متین ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$جم \frac{1}{2} (ب+ج) = \frac{م+ا-جم ب}{۲}$$

$$\text{اور } جم \frac{1}{2} (ب+ج) = \frac{م+ا-جم ب}{۲}$$



(۲۲) اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ب وج - ۹۰)} = \frac{\text{ب و} + \text{ج و} - ۲ \text{ و}}{\text{ب و} \times \text{ج و}}$$

(۲۳) - اگر ج = ب + ۱/۲ اور ب ج نقطہ پر تقسیم ہو ایسا کہ ب و : وج =

$$۱ : ۳ \text{ تو ثابت کرو کہ } ۱ ج > ۲ و = ۲ ا و ج$$

(۲۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خطوط مستقیم ج د ج ع مساوی زاویے بنائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع} > :: ج : ۲ ب جب ا م م$$

(۲۵) اگر ا ب کو نقاط ج، د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ب ا پ د جب ب پ ج} = ۲ \text{ جب ا پ ج جب ب پ د}$$

(۲۶) اگر ایک متوازی الاضلاع کے ضلع و ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سے ہو تو ثابت کرو کہ دتروں کا حاصل ضرب ہے { (و + ب) - م و ب } جم سے کم

(۲۷) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = طہ، زاویہ ج ا د = فہ تو ثابت کرو کہ مم طہ - مم فہ = مم با - مم ج

(۲۸) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں ع، ب میں اور ضلع ج کو دو مقطعوں لا، م میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ طہ پر قائم ہے؛

$$\text{ثابت کرو کہ } لا مم ع - م مم ب = م مم ا - لا مم ب = (لا + م) مم طہ$$

(۲۹) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۹۰ کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

$$۱ : ۲ : ۳ : ۴ : ۵ : ۶ : ۷ : ۸ : ۹ : ۱۰ \text{ - اسے -}$$

(۳۰) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\text{و جم ط} = \text{ب جم (ج - ط)} + \text{ج جم (ب + ط)} \text{ جس میں ط کوئی زاویہ ہے}$$

اگر کسی مستوی ذوالربعۃ الاضلاع کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج د کو و ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

واجب ۱-ب جب (۱-ب) + ج جب (۱-ب-ج) = مس ۲  
 وجم ۱-ب جم (۱-ب) + ج جم (۱-ب-ج)  
 (۳۱) اگر ایک مثلث ا ب ج ایسا ہو کہ ایک خط مستقیم ا د جو ب ج کو  
 نقطہ د پر ملتا ہے کہینچا جاسکتا ہے اس طور پر کہ د ب ا د = ۱/۲ د ب ا ج  
 اور نیز ب د = ۱/۲ ب ج تو ثابت کرو کہ و ب = (ب-ج) (ب+ج)  
 (۳۲) ایک مربع کا ایک ضلع ب ج ہے اور ب ج کے عمودی ناصف پر دو نقطے  
 پ، ق لیے گئے ہیں جو مربع کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہیں؛ ب پ،  
 ج ق کو طایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں؛ ثابت  
 کرو کہ مثلث ا ب ج میں

(۳۳) اگر

$$\begin{aligned} \text{مس ۱ (مس ب-مس ج)} &= ۸ + ۰ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{ما} + \text{ی} - ۲ \text{ ما ی جم} = \text{و} \\ \text{ی} + \text{لا} - ۲ \text{ ی لا جم} = \text{ب} \\ \text{لا} + \text{ما} - ۲ \text{ لا ما جم} = \text{ج} \end{array} \right. \end{aligned}$$

اور  $\pi ۲ = ج + ب + ج$  تو ثابت کرو کہ

(ما ی جب ع + ی لا جب ب + لا ما جب ج) = ۱/۲ (۲ ب ج + ۲ ج و + ۲ و ب - و ب ج)  
 (۳۴) اگر ایک مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں اور لا، ما، ی حقیقی مقداریں  
 ہوں ایسی کہ وہ مساوات

$$\frac{\text{ما جب ج-ی جب ب}}{\text{لا-ما جم ج-ی جم ب}} = \frac{\text{ی جب ا-لا جب ج}}{\text{ی جم ا-لا جم ج}}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ی}}{\text{ج ب ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج ب ب}} = \frac{\text{لا}}{\text{ج ب ج}}$$

(۳۵) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ جو کسی نصف قطر کے دائرے کے  
 ایک قطاع میں بنایا جاسکتا ہے ۱/۲ مس ۲ ہے جہاں ۲، قطاع کا

زاویہ ہے۔

(۳۶) بناؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے 'ا' ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوں کے ساتھ زاویہ  $\frac{1}{2}(\angle \text{ب} + \angle \text{ا})$  بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے 'ا' ب، ج ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں 'م'، 'پ'، 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے ماس التماموں کی خطائیں مقداروں

ق م (پ ج م ج + ج ج م ج - م) ق م ب (پ ج م ج + ج ج م ج - پ)  
ق م ج (م ج م ج + م ج م ج - ج)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمائش میں دو ضلعوں 'ا' ب میں چھوٹی خطائیں لا 'ا' واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

-  $(\frac{1}{2} \angle \text{م ب} + \frac{1}{2} \angle \text{م ا})$

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے؛ اور کسی طول کے ناپے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں ن ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمائش کردہ) '۱۱۰'، '۸۱'، '۵۹' ہیں خطا کی انتہا جو اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۳٪ ۱۲٪ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذواربہ الاضلاع کے چار زاویوں کی جیوب التمام ج، ج، ج، ج، رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں:-

$$\begin{aligned}
 & (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴) - (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) \\
 & + (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) \\
 & + (ج^۱ + ج^۲ + ج^۳ + ج^۴ + ج^۵ + ج^۶ + ج^۷ + ج^۸ + ج^۹ + ج^{۱۰}) = 0
 \end{aligned}$$

# گیارہواں باب

## مثلثوں کا حل

۱۳۔ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے یعنی اس وقت جب چھ اجزا میں سے تین اجزا کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزا کی مقداریں معلوم کرنے میں۔ ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کریں گے جن کو لوکارٹوں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر کے انجام پاسکتا ہے۔

## قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۴۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، د ہے، تب یہ زاویہ دے ہوئے اجزا میں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو ان مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزاء دیے گئے ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع 'ا' ب دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ مس ۱ = ب سے 'ا' معلوم کیا جاسکتا ہے اور پھر ب، 'ا' کا ہم زاویہ ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز ج = ر قم 'ا' جس سے ج معلوم ہوتا ہے جبکہ 'ا' معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے لوکارٹی ضابطے ہیں

$$\text{ل مس } ۱ = ۱۰ + \text{لک } ۱ - \text{لک } ب ،$$

$$\text{ب} = ۹۰ - ۱ ،$$

$$\text{لک } ج = \text{لک } ۱ - \text{ل جب } ۱ + ۱۰$$

(۲) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک ضلع 'ا' دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ جب ۱ =  $\frac{ج}{ا}$  کے ذریعہ 'ا' معلوم کیا جاتا ہے؛ ب، 'ا' کا متمم ہے؛ ضابطہ ب = ج جم 'ا' یا ب = ج - 'ا' سے ب معلوم ہوتا ہے۔

لوکارٹی ضابطے ہیں

$$\text{ل جب } ۱ = ۱۰ + \text{لک } ۱ - \text{لک } ج ،$$

$$\text{ب} = ۹۰ - ۱ ،$$

$$\text{لک } ب = \text{لک } ج + \text{ل جم } ۱ - ۱۰$$

اور

$$\text{لک } ب = \text{لک } (ج + ۱) + \text{لک } (ج - ۱)$$

یا

(۳) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک زاویہ 'ا' دیے گئے ہیں تب فوراً 'ا' کے متمم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ ل = ج جب ۱ سے 'ا' معلوم ہوتا ہے اور ب پچھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

لوکارٹی ضابطے ہیں

$$\text{لک } ۱ = \text{لک } ج + \text{ل جب } ۱ - ۱۰ ،$$

$$\text{ب} = ۹۰ - ۱ ،$$

لوک ب = لوک ج + ل جم ا۔ ا۔  
 لوک ب =  $\frac{1}{2}$  لوک (ج + ل) +  $\frac{1}{2}$  لوک (ج۔ ل)  
 (۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ل اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛  
 تب باب ۹۰۔ ۱ ج ہے ل ق م ا اور ب پھلی دو صورتوں کی مانند  
 معلوم ہوتا ہے۔

لوکار تہی ضابطے ہیں

$$\text{لوک ج} = \text{لوک ل} - \text{ل جب ا} + ۱۰$$

$$\text{ب} = ۹۰ - ۱$$

$$\text{لوک ب} = \text{لوک ج} + \text{ل جم ا} - ۱۰$$

$$\text{لوک ب} = \frac{1}{2} \text{ لوک (ج + ل)} + \frac{1}{2} \text{ لوک (ج۔ ل)}$$

۱۳۲۔ بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے سہولت بخش  
 نہیں تھے مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ۱۰۰ کے قریب ہو تو اس کو مساوی  
 جب ۱ =  $\frac{1}{2}$  سے سہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جاسکتا کیونکہ متصل  
 جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں، اس لیے ہم دوسرا  
 ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل  
 کرتے ہیں ب مس  $\frac{1}{2}$  ب = ج۔ ل ب م  $\frac{1}{2}$  ب = ج + ل  
 پس س  $\frac{1}{2}$  ب =  $\frac{ج - ل}{ج + ل}$  اور اس طرح

$$\text{مس} (۹۵ - ۱۴) = \left( \frac{ج - ل}{ج + ل} \right)^{\frac{1}{2}}$$

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعتراض سے پاک ہوتے کی وجہ سے ا کے معلوم  
 کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

غیر صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر سہولت بخش  
 ہے جبکہ بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج۔ ج جب ا x  
 مس  $\frac{1}{2}$  استعمال کر سکتے ہیں۔





ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۴)

$$f = \frac{3 \text{ جب } 2}{2(2 + \text{جم } 2)} f$$

کو جس میں تقریبی خطا  $\frac{1}{8}$  ہے استعمال کرو اور رکھو  $2 = f$  تو ہیں ضابطہ

$$\text{حاصل ہوتا ہے } b = \frac{3}{2 + \text{جم } 2} \text{ اور تقریبی خطا ہے } \frac{1}{8} \text{ ہے}$$

پس ب، اس تقریبی مساوات

$$b = \frac{3}{2 + \text{جم } 2} \times 56,2956$$

سے درجوں میں حاصل ہوتا ہے۔

## غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۳۴ — مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔

ضابطوں

$$\text{جب } \frac{1}{2} = \left\{ \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \right\}$$

$$\text{جم } \frac{1}{2} = \left\{ \frac{s(s-b-c)}{bc} \right\}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \left\{ \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-b-c)} \right\}$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یہ سب ضابطے لوکار تھیمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

## مثال

ایک مثلث کے ضلع، سمت، و زاویہ کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوکار تم دیے گئے ہوں:۔

$$\text{لوک } ۳۰۱۰۳۰ = ۲$$

$$\text{ل مس } ۳۶۱۲ = ۹۵۳۴۹۳۲۹ \quad \text{فرق } ۱ \text{ کے لیے } = ۱۰۰۰۵۹۳$$

$$\text{ل مس } ۵۱۵ = ۹۵۶۵۰۲۸۱ \quad \text{فرق } ۱ \text{ کے لیے } = ۱۰۰۰۳۳۹$$

$$\text{چونکہ } ۱۰ = ۱ \text{ س } - ۱ = ۶ \text{ س } - ۲ = ۳ \text{ س } - ۱ = ۱ \text{ س } \text{ لیے}$$

$$\text{مس } ۱ = ۱ \text{ س } - ۱ = ۶ \text{ س } - ۲ = ۳ \text{ س } - ۱ = ۱ \text{ س } \text{ طبع}$$

$$\text{ل مس } ۱ = ۱۰ = (۳۰۱۰۳۰ + ۱) \text{ س } - ۱ = ۹۵۳۴۹۳۲۹$$

$$\text{اور ل مس } ۱ = ۱۰ = (۳۰۱۰۳۰ - ۱) \text{ س } - ۱ = ۹۵۶۵۰۲۸۱$$

$$۱ \text{ معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۹۵۳۴۹۳۲۹ - ۹۵۶۵۰۲۸۱ = ۱۰۰۰۱۵۶$$

$$\text{اور } ۱۰۰۰۱۵۶ = ۹۵۳۴۹۳۲۹ - ۹۵۶۵۰۲۸۱ \text{ تقریباً اس لیے } ۱ = ۱۰۰۰۱۵۶ \text{ یا } ۳۱۶۶۱۲۲۵ = ۱$$

$$\text{ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ } ۹۵۶۵۰۲۸۱ - ۹۵۳۴۹۳۲۹ = ۱۰۰۰۲۳۴$$

$$\text{اور } ۱۰۰۰۲۳۴ = ۹۵۶۵۰۲۸۱ - ۹۵۳۴۹۳۲۹ \text{ تقریباً اس لیے } ۱ = ۱۰۰۰۲۳۴ \text{ یا } ۱۵۶ = ۱$$

$$\text{ب } ۱۵۶ = ۱۰۰۰۲۳۴ \text{ نیز } ۱۵۶ = ۱۰۰۰۲۳۴ - ۱۰۰۰۱۵۶ = ۱۰۰۰۰۷۸ \text{ اس طبع}$$

زاویوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہو گئیں۔

۳۵۔ مثلث حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ

دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب، ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں بہت ب اور ج ضابطہ

$$\text{مس } ۱ = (ب - ج) = \frac{ب - ج}{ب + ج} \text{ مس } ۱$$

اور ضابطہ  $ب + ج = ۱۸۰ - ۱$   
 سے ستین کیے جاسکتے ہیں۔ نوکارتی ضابطہ ہے  
 $ل + مس + (ب - ج) = لوک (ب - ج) - لوک (ب + ج) + ل + مم + ۱$   
 ب اور ج معلوم کرنے کے بعد ضلع و ان تین ضابطوں  
 نوک = لوک ج + ل جب ا۔ ل جب ج  
 لوک ل + ل جم + (ب - ج) = لوک (ب + ج) + ل جب ا  
 لوک ل + ل جب + (ب - ج) = لوک (ب - ج) + ل جم + ۱  
 میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔  
 ہم و کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ  $ل + ج = ۲$  ب ج جم  
 لینے  $ل + (ب + ج) = ۲$  ب ج جم + ۱  
 اس لیے  $ل = (ب + ج)$  جم فہ جہاں فہ مساوات

$$ج ب ف = ۲ ماب ج جم + ۱$$

(171) سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے فہ کو نوکارتی ضابطہ  
 $ل جب ف = لوک ۲ + لوک ب + ۱ + لوک ج + ل جم + ۱ - لوک (ب - ج)$   
 سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ا کو ضابطہ  
 $لوک ل = لوک (ب + ج) + ل جم ف - ۱۰$   
 سے۔

## مثال

اگر  $ل = ۱۲۳$ ،  $ج = ۳۲۱$  اور  $ب = ۱۶۹$  تو  $ل + ج = ۴۹۰$  معلوم کرو۔  
 یہ دیا گیا ہے کہ

لوک $۱۵۹۹۵۶۳۵۲ = ۹۹$	ل جب $۱۶۹ = ۱۶۹$
لوک $۱۲۳ = ۲۵۰۸۹۹۰۵۱$	ل جب $۱۵۹ = ۲۵۰۸۹۹۰۵۱$
لوک $۳۲۱ = ۳۲۱$	ل جم $۱۶۹ = ۱۶۹$
لوک $۳۲۱ = ۳۲۱$	ل مس $۳۲۱ = ۳۲۱$

ہیں حاصل ہوتا ہے

$$ل م س \frac{1}{2} (ج - ۱) = ل م ا + کوک - کوک$$

$$۲۳۳۶۳۵۳۰ - ۱۵۹۹۵۶۳۵۲ + ۱۰۵۵۸۳۱۹۰۱ =$$

$$۱۰۵۳۳۲۴۶۲۳ =$$

$$اب \frac{۱۰۵۳۳۲۴۶۲۳}{۳۸۵۳۴} = ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ - ۱۰۵۳۳۲۴۶۲۳ = ۱۰۵۳۳۲۴۶۲۳$$

$$۲۷۳۳۲۴۵۵۲ تقریباً اس لیے \frac{1}{2} (ج - ۱) = ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ \text{ نیز } (ج + ۱) = ۲۷۳۳۲۴۵۵۲$$

$$اس لیے ۱ = ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ - ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ = ج$$

$$نیز کوک ب = ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ + ۹۵۹۹۹۰۵۱ - ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ = ۹۵۹۹۹۰۵۱$$

$$اور ۵۶۵۵ \times ۴۳۸۴ = ۲۴۳۰۰۱۵۵ = اس لیے ل جب ۲۷۳۳۲۴۵۵۲ = ۲۴۳۰۰۱۵۵$$

$$اس لیے کوک ب = ۲۳۳۶۳۵۱۴ = ۲۲۲ - \frac{۱۲}{۱۹۵۶} = ۲۲۱.۹۹۲$$

۱۳۶ — مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے

ایک کے مقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ 'ل' و 'ج' اور 'ا' دیے ہوئے اجزاء ہیں تو جب ج مساوی ج ب = ج ب ا سے متعین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے کے بعد اگر ج ب ا و ج کی بالعموم دو قیمتیں ۱۸۰ سے کم ایک حادہ اور دوسری منفرجہ ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛ پس ہیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ج ب ا و ج ب ج = ج ب ا ہوگا لیکن ہے اور اس حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے اجزاء رکھتا ہو۔

(۲) اگر ج ب ا = ج ب ج = ۱ اور اس لیے ج کی صرف ایک قیمت ۹۰ ہے۔ اگر ۹۰ > ج تو دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ ایک مثلث موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ۹۰ < ج تو ج کی قیمت

(172)

ناقابل قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔  
(۳) اگر ج جب  $a > b$  تو جب ج  $a > b$  اور اس لیے ج کی قیمتیں  
ہیں ایک حادہ اور ایک منفرجہ پس  
(عد) اگر ج  $a > b$  تو نہیں حاصل ہونا چاہیے ج  $a > b$  اس لیے ج  
حادہ ہونا چاہیے اس طرح دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ صرف ایک مثلث  
موجود ہوگا؛

(ب) اگر ج  $a < b$  تو ج کا حادہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی  
دونوں قیمتیں قابل قبول ہیں بشرطیکہ  $a > b$ ؛ لیکن اگر  $a < b$  تو دونوں  
قیمتیں ناقابل قبول ہیں کیونکہ ج  $a < b$  اس لیے دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ  
دو مثلث ہونگے اگر  $a > b$  اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر  $a < b$ ؛  
(ج) اگر ج  $a = b$  تو ج  $a = b$  یا  $a = b$ ؛ ج کی قیمت  $a = b$  کے لیے  
مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت  
میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنی  $a = b$  رہ جاتی ہے  
جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملے گا بشرطیکہ  $a > b$ ۔

ہم نتائج محصلہ بالا کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

اگر ج جب  $a < b$  کوئی حل نہیں  
ج جب  $a = b$  ایک حل  
ج جب  $a > b$  کوئی حل نہیں  
ج جب  $a > b$  ایک حل  
ج جب  $a = b$  ایک حل  
ج جب  $a < b$  کوئی حل نہیں  
ج جب  $a > b$  ایک حل  
ج جب  $a = b$  ایک حل  
ج جب  $a < b$  کوئی حل نہیں  
ج جب  $a > b$  ایک حل  
ج جب  $a = b$  ایک حل  
ج جب  $a < b$  کوئی حل نہیں

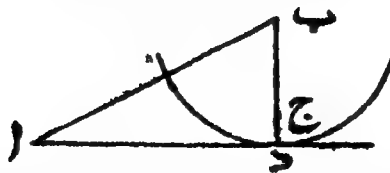
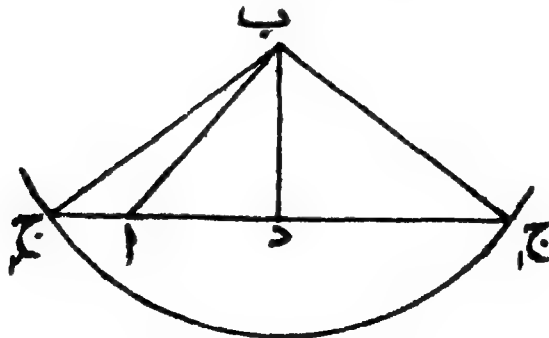
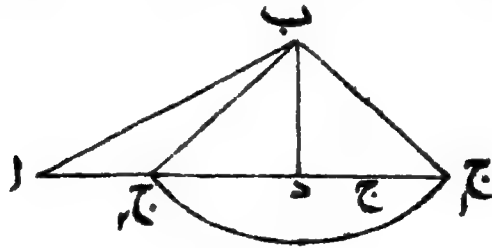
اگر ج کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر  
علوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

$$\text{مس ج} = \pm \frac{\text{ج جب ا}}{(\text{ا} + \text{ج جب ا}) (\text{ا} - \text{ج جب ا})} \text{، مس (ہم} + \frac{1}{2} \text{ج)} = \pm \frac{(\text{ا} + \text{ج جب ا})}{\text{ا} - \text{ج جب ا}}$$

میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۷۔ دفعہ ماضی میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی ہے ان کی تحقیق ہندسی طور پر کرنا سبق آموز ہو گا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا،  
ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر  
ا > ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کرے گا اور اس لیے  
دیے ہوئے اجزاء کے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جاسکتا؛ لیکن اگر  
ا < ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرتا ہے  
اگر ا > ج اور ا < ج تو ج اور ج دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں  
(دیکھو شکل (۱۱)) اور دو مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج میں سے ہر ایک



دیے ہوئے اجزا رکھتا ہے؛ زاویے  $A$ ،  $B$  اور  $C$  باہم متتام ہیں۔  
 اگر  $\angle A < 90^\circ$  تو  $A$  کے پرے ہوگا اور کوئی مثلث دیے  
 ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر  $\angle A > 90^\circ$  تو  $A$  کی مقابل  
 جانبوں پر ہونگے اور صرف مثلث  $ABC$  میں دیے ہوئے اجزا ہونگے۔  
 اس آخری صورت میں مثلث  $ABC$  میں  $A$  پر کا زاویہ  $A$  کے مساوی  
 نہیں ہوگا بلکہ  $180^\circ - A$  کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں  
 کر سکتا۔

اگر  $\angle A = 90^\circ$  جب  $A$  تو دائرہ  $A$  کو نقطہ  $C$  پر مس کر گیا اور قائم الزاویہ  
 مثلث  $ABC$  مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزا ہونگے  
 بشرطیکہ  $\angle A > 90^\circ$ ۔  
 یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱۱))

$\angle A = 90^\circ$ ،  $\angle B = 90^\circ$  اور  $\angle C = 90^\circ$ ۔  $\angle A = 90^\circ$  جب  $A$   
 اس لیے  $B$  کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

$\angle A = 90^\circ$ ،  $\angle B = 90^\circ$  اور  $\angle C = 90^\circ$ ۔  $\angle A = 90^\circ$  جب  $A$   
 یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛  $B$  کی ان دو قیمتوں کو ہم  
 حسب ذیل  $B$  کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔  
 $\angle A = 90^\circ$ ،  $\angle B = 90^\circ$  اور  $\angle C = 90^\circ$ ۔  $\angle A = 90^\circ$  جب  $A$

۱۳۸۔ مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے

(174)

دیے جائیں۔  
 فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع  $AB$  ہے اور دیے ہوئے زاویے  $A$ ،  $C$ ،  
 تب مساوات  $B = 180^\circ - A - C$  سے  $B$  کا تعین ہوتا ہے اور  
 مضبوط

لوک ب = لوک ل + ل جب ب - ل جب ا  
 لوک ج = لوک ل + ل جب ج - ل جب ا  
 سے ضلع ب اور ج معلوم ہوتے ہیں۔

## مثال

اگر  $ل = ۱۰۰$ ،  $ا = ۱۰$ ،  $ب = ۲۶$  تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\begin{aligned} \text{لوک } ۱۲۳۹۶ &= ۰.۹۳۲۸۱۶ \times ل \quad \text{ل جب } ۲۶ = ۹۶۹۸۶۹۰۴۱ \\ \text{لوک } ۱۲۳۹۶ &= ۰.۹۳۳۱۶۶ \times ل \quad \text{ل جب } ۲۵ = ۹۶۸۹۳۵۴۴۲ \\ \text{ل جب } ۲۸ &= ۹۶۸۹۳۶۴۴۸ \end{aligned}$$

ہیں محل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \text{لوک ب} &= ۱ + ۹۶۹۸۶۹۰۴۱ - ل جب ا = ۱۰ \\ \text{اب چونکہ ل جب ا} &= ۱۰ \times ۰.۹۳۳۱۶۶ + ۹۶۸۹۳۵۴۴۲ = ۹۶۸۹۳۶۱۱۳ \\ &= ۹۶۸۹۳۶۱۱۳ \end{aligned}$$

اس لیے لوک ب =  $۱۵۰۹۳۲۹۲۸$  اور اس لیے ب =  $۱۲۵۳۹۶۳$  تقریباً  
 یا  $۱۲۵۳۹۶۳ = ب$

۱۳۹ — جلد ج جم ا ± ما - ج ا جب ا جو ب کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہے لوکار تہی عل حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے،

$$\text{فرض کر دو جب ف} = \frac{ج}{ل} \text{ جب ا تو ب} = \frac{ل جب (ف \pm ا)}{ج}$$

پس مساوات ل جب ف = ل جب ا + لوک ج - لوک ل سے ف معلوم کرنے کے بعد مساوات لوک ب = لوک ل + ل جب (ف ± ا) - ل جب ا سے ب معلوم کیا جاسکتا ہے۔

زاویوں ا، ب، ج کے دائری ناپ علی الترتیب ا، ب، ج سے



تعبیر کئے گئے ہوں تو مثلثوں کے حل کے لئے حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-  
(۱) فرض کرو کہ 'ا' ج 'و دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے،  
تب ضابطہ

$$ج = \frac{ا جب ا}{جب ا} سے ہیں یہ تقریبی ضابطہ$$

$$ج = ا ق م ا \{ ج - \frac{1}{4} ج^2 + \frac{1}{12} ج^3 - \dots \}$$

مسا ہے۔ نیز اگر 'ا' ج دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$ج = \frac{ا (ج - \frac{1}{4} ج^2 + \frac{1}{12} ج^3 - \dots)}{ج - \frac{1}{4} ج^2 + \frac{1}{12} ج^3 - \dots}$$

$$پس ج = ا \frac{ج}{ج} + ا \{ ج - \frac{1}{4} ج^2 + \frac{1}{12} ج^3 - \dots \}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ 'ا' ج 'و حسب سابق دیے گئے ہیں؛ نیز فرض

کرو کہ ج تقریباً ۹۰ ہے تب ج = ا جب ا : اس لیے جملہ ج = ا جب ا

(۱- ا) ج + ا ج (ج - ا) ج کو تقریبی طور پر متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

اگر ا اور ج دونوں ۹۰ کے قریب ہوں تو

$$ج = ا جب ا \quad یا \quad ج = ا (ج - ا) ج + ا ج (ج - ا) ج$$

$$اس لیے ج = ا (ج - ا) ج + ا ج (ج - ا) ج$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔  
 ۴۰۔ اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دیتے ہیں جیسے مثلثوں  
 اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔  
 (۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے  
 عمود دیے گئے ہیں؛ ان کو 'ع'، 'ع'، 'ع' سے تعبیر کرو، تب  
 $ا \times ع = ب \times ع = ج \times ع =$  مثلث کے رقبہ کا دو چند۔ اب چونکہ

$$\text{جم} = \frac{ا(ب-ع)}{ب} = ۱\frac{۱}{۲}$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{جم} = ۱\frac{۱}{۲} = \frac{(ا+ب+ع)(ا+ب-ع)(ا+ع-ب)(ب+ع-ا)}{۴ا ب ع}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز  $ع = ج$  جب ا، اس لیے ا معلوم ہونے  
 کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھبرا دیے گئے  
 ہیں۔ تب

$$س = (ج ب ا + ج ب + ج ج)$$

پس س معلوم ہوتا ہے اور پھر  $ج$  بالترتیب

$$۲ س ج ب ا، ۲ س ج ب ج، ۲ س ج ج$$

$$\frac{۲ س ج ب ا}{ج ب ا + ج ب + ج ج} = ۱ \quad \text{کے مساوی ہیں یا}$$

مع ب اور ج کی مناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$\frac{س ج ب ا}{جم} = ۱\frac{۱}{۲}$$

بہن تمویل ہوتی ہے جو لو کار تھی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر گئے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ  $\angle$  ہے، ارتفاع  $\angle$ ، اور دیا ہوا منحنی ج۔ ج =  $2\pi$ ؛ تب

چونکہ ج + ج = ۱۰ - ۱، اس لیے ج = ۹۔ ۵ + ۴ = ۱۰ - ۱، ج = ۹۔ ۳ + ۶ = ۱۰ - ۱، ج = ۹۔  
 نیز ۱ = ع (مہجہ + مہجہ) ح {مس (۱۰ - ۵) + مس (۵ + ۱)} =

اس لیے  $\frac{1}{x} = \frac{2 \text{ جب } 1}{\text{جرم } 1 + \text{جرم } 2}$ ، پس دو درجی مساوات

$$1^{\circ} + 2^{\circ} + 3^{\circ} + \dots + n^{\circ} = \frac{n(n+1)}{2}$$

جَمْ ا (وُ + ع) + ر + وُجْم عجم = ع - وُجْم ع

سے جم حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

$$\frac{+ \frac{r}{r^2 + 1} + \frac{r}{r^2 + 1}}{r^2 + 1} \pm \frac{r}{r^2 + 1} - \frac{r}{r^2 + 1}$$

## کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱۔ کارنٹ، لہولیر، لیکسل اور دیگر علماء ریاضی نے ان رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور ان طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو۔ علم الکثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی مضابطے دفعہ ۱۲۰ میں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزاء میں سے (۲ ن-۳) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم از کم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کر دو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو جو کچھ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا ایسا مثلث کے صرف دو اجزاء کا معلوم ہونا درکار ہوتا تاکہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی پوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی نسبت دو اور اجزاء معلوم ہونا چاہئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی مساوی ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہئے جن میں سے ایک

Carnot, geometrie der Stellung

۱

L' Huillier, Polygonometrie. Geneva . 1789

۲

Lexell, Nov. comm. Petrop. vola. xix. xx

۳

ضلع ہو اس لیے ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تقیین کے لیے  
 ۳+۲ (ن-۳) یعنی (۲-ن) اجزاء دیے جائے چاہئیں۔ ان (۲-ن) اجزاء میں سے اگر صرف (ن-۳) ضلع ہوں تو ن زاویے دیے جائیں گے لیکن اگر (ن-۱) زاویے دیے گئے ہوں تو ن داں زاویہ معلوم ہو سکتا ہے اس لیے گو یہ صرف (۲-ن) غیر تابع اجزاء دیے گئے ہیں اور یہ ناکافی ہیں۔ اس لیے کل اجزاء میں سے کم از کم (ن-۲) اجزاء ضلع ہونے چاہئیں۔

بعض صورتوں میں کثیر الاضلاع کو دتروں کے ذریعہ مثلثوں میں تقسیم کر کے اس کو آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے، اس میں دتروں کو محسوب کرنا پڑتا ہے، تاہم یہ طریقہ ہمیشہ سہولت بخش نہیں ہوتا جیسا کہ ایک ذوالربعۃ الاضلاع کی صورت پر غور کرنے سے معلوم ہو گا جبکہ اس کے تین زاویے اور دو متقابلہ ضلع دیے گئے ہوں۔

۱۴۲۔ ن ضلعی کثیر الاضلاع حل کرنا جبکہ (ن-۱)

ضلع اور (ن-۲) زاویے دیے جائیں۔

(۱) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے معلوم شدنی ضلع کے متصل ہیں۔ ہم دفعہ ۱۲ کے مطابق ضلعوں کے درمیان خارج زاویوں کی بجائے ہم دفعہ ۱۲ کے مطابق ضلعوں کے درمیان داخل زاویوں کی شدنی ہے، جب دفعہ ۱۲ کی مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رو سے

(177)

$$\text{جب } \theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} \text{ (ہم دفعہ ۱۲) میں } \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = \theta$$

$$= \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} \text{ (جب } \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = \theta \text{) میں } \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = \theta$$

$$\text{پس مس } \theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} \text{ (جب } \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = \theta \text{) میں } \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = \theta$$



اس کے بعد ضلع لچ سب وقت سابق معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) اس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاوئے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ ہک وہ اس میں جن پر کہ زاویے غیر معلوم ہیں؛ ہک کو بلاؤ تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاع میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے ان دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس لئے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب ہک اور ہک پر کے زاویوں کو متین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے دو متصل زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی بموجب حل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور ہک پر کے زاویے ان دو حصوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ ہک سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

(178)

۱۴۳ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲)

ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

ہم رشتہ  $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع اور معلوم کرنے کے لئے مساوات

$$a + b + c + \dots + n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

کو استعمال کر دو دوسرے غیر معلوم ضلع لچ کے عمود پر نکل لینے سے حاصل ہوتی ہے۔ پھر ہم لچ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری بنیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۱۴۴ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ف، ق، سر اور اس ہیں جن پر کے زاوے نہیں دئے گئے ہیں؛ ف، ق، ق، سر، سر ف کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ فقی ہر کے سوا ہر حصہ میں تمام اضلاع سوائے ایک کے اور تمام زاوے سوائے اُن دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو ان غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں؛ اس لئے ہم ف، ق، ق، سر، سر ف، اور ف، ق، سر پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث ف، ق، سر کے زاوے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم ف، ق، سر پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیر الاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

## بلندیاں اور فاصلے

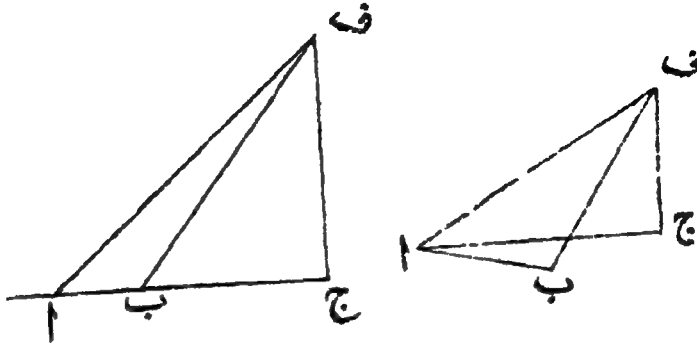
۱۴۵۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعین پر مثلثوں کے مل کے اطلاعات کی چند مثالیں دینگے اس ضمن میں زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔ وہ خط مستقیم جو مقام مشاہدہ کو کسی شے سے ملاتا ہے افقی کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا، اس زاویہ کو شے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

۱۴۶۔ افقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ ف ہے اور اس کا نلیل افقی مستوی پر ج ہے، فرض کرو کہ ف ج = ف اور اس افقی مستوی پر کوئی خط ا ب = ا بشرط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ ا ب ج ایک خط مستقیم ہے،



فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پائش کیے گئے ہیں؛



ان کو 'ب' سے تعبیر کرو۔ تب  $a = aj - bj = f - (mm - mm)$  اس لیے

$$f = \frac{aj - bj}{bj - mm}$$

جس سے  $f$  معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک ج کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، اہر ف کا زاویہ ارتفاع پائش اور نیز زاویوں  $f$  اب  $(=)$  جہ اور  $f$  با  $(=)$  ضہ کی پائش کرو۔

$$تب f - a = ab \times \frac{جہ ضہ}{جہ (جہ + ضہ)}، اور f = af \times جہ ضہ$$

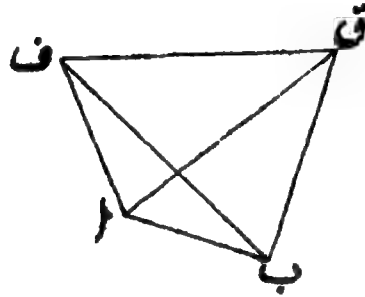
$$f = \frac{جہ ضہ}{جہ (جہ + ضہ)}$$

اس سے  $f$  معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۷ — ناقابل رسائی دو نقطوں کے درمیان  
فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ا) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں ان میں سے ہر نقطہ سے نظر آ سکتے ہیں۔ اب (180) حسب ذیل تین زاویے پیمائش کرو۔

ف ا ق = ح، ق ا ب = ب، ف ا ب = ج؛



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ح) اور ق ب ا (= ح) پیمائش کرو۔

مثلثوں ا ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ا \times \frac{\text{جب ح}}{\text{جب (ج + ح)}}$$

اور ا ق = ا \times \frac{\text{جب ح}}{\text{جب (ب + ح)}}، پس ا ف اور ا ق ان ضابطوں سے

حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{لوک ا ف} = \text{لوک ا} + \text{ل جب ح} - \text{ل جب (ج + ح)}$$

$$\text{لوک ا ق} = \text{لوک ا} + \text{ل جب ح} - \text{ل جب (ب + ح)}$$

مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = ح معلوم ہیں

اس لیے ہم ضابطوں

ل م س پ (ا ف ا ق - ا ق ف) = ل م پ ع + ل و ک (ا ق - ا ف)  
- ل و ک (ا ق + ا ف)

ا ف ق + ا ق ف = ۱۸۰° ع

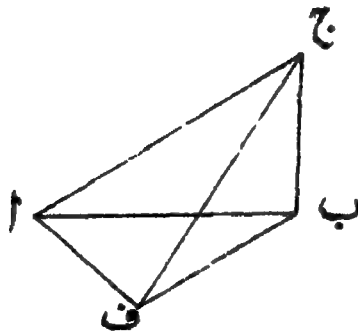
سزاویے ا ف ق اور ا ق ف معلوم کرتے ہیں۔ پھر ضابطہ

ل و ک ف ق = ل و ک ا ف + ل جب ع - ل جب ا ق ف

کے ذریعہ ف ق معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۸ — پوتھنٹ (Pothnot) کا مسئلہ — ایک

مثلث کے مستوی میں وہ نقطہ معلوم کرنا جس پر مثلث کے ضلعوں کے  
محاذاً دیے ہوئے زاویے بنیں۔



فرض کرو کہ ع، ب، دہ زاویے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں  
ا ج، ب ج کے محاذی نقطہ ف پر بنتے ہیں؛ فرض کرو کہ زاویوں  
ف ا ج، ف ب ج کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کیا گیا ہے؛

ف کا محل معلوم ہو جاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہو جائیں کیونکہ شلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب معلوم کیے جاسکتے ہیں۔  
یہیں ماحصل ہوتا ہے

181

$$لا + ما = ۱۱۲ - ۷ - ۲ - ج$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ب جب لا}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{ج ب}} = \text{ف ج}$$

ایک امدادی زاویہ ذ مان لو ایسا کہ

$$\text{مس ذ} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{ب جب ب}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{ج ب لا}}{\text{ج ب ما}} = \text{مس ذ، پس} \quad \frac{\text{ج ب لا - جب ما}}{\text{ج ب لا + جب ما}} = \text{مس (ذ - ۲۵)}$$

$$\text{یا} \quad \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا - ما) = \text{مس} \frac{۱}{۲} (لا + ما) \text{مس (ذ - ۲۵)}$$

$$= \text{مس (ذ - ۲۵)} \text{مس} \frac{۱}{۲} (۷ + ۲ + ج)$$

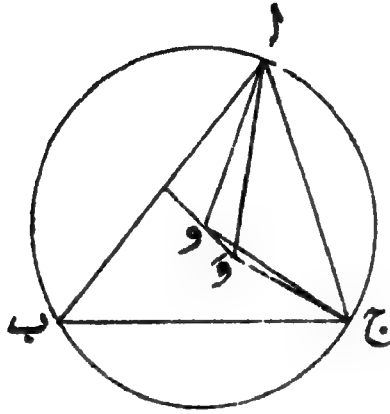
اس طرح لا - ما معلوم کیا جاسکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے لا اور ما معلوم ہو سکتے ہیں۔

## مثالیں

(۱) افقی مستوی میں ایک شلث ا ب ج کے راسوں ا ب ج میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع دیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی  $\frac{۱}{۲} \text{مس} ۷$  ہے نیز اگر ج پہر کے ارتفاع میں چھوٹی خطان واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی بہت تقریبی طور پر ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{مس} ۷ (۱ + \frac{\text{ج م ج}}{\text{ج ب ب}} \times \frac{\text{ج ب ب}}{\text{ج ب ب}})$$

فرض کرو کہ پہاڑ کی چوٹی کا ظل مستوی ا ب ج پر وہی تب اگر پہاڑ



کی بلندی ف ہو تو  $ق = و ا$  مس  $ع = و ب$  مس  $ع = و ج$  مس  $ع$ ؛  
اس لیے  $و ا ب ج$  کے حائل دائرہ کا مرکز ہے، پس  $و ا = و ب = و ج$ ؛  
یا  $ق = و ا$  مس  $ع$  ق  $ا$ ۔ اگر  $ج$  پر کے ارتفاع کی پائش  $ع + و$  ہو تو فرض  
کرو کہ  $و$  پہاڑ کی چوٹی کا ظل ہے، تب چونکہ  $ا$  اور  $ب$  پر کے ارتفاع مساوی  
ہیں اس لیے  $و$  اور  $ا ب$  پر عمود ہے؛ اب فرض کرو کہ پہاڑ کی بلندی  
 $ق + لا$  ہے۔ ہندسی طور پر حاصل ہوتا ہے

$$ق ا = و ا + و ج$$

$$و ج = و ج - و ج (ا ب)$$

اب اگر  $و$  اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مربع نظر انداز ہو سکیں، تو (182)

$$ق ب لا = ق ا مس ع = و ج مس (ع + و)$$

$$= (و ا + و ج) مس ع = و ج - و ج (ا ب) مس (ع + و)$$

پس  $لا = و ج \times مس ع - و ج (ا ب) مس ع + و ج ق ط ع$  جب  $ق$   
کیونکہ  $مس (ع + و) = مس ع + ق ط ع$  جب  $ق$  تقریباً  $و$  کو سا قط کرنے سے

لا تجم (اجب) مس نہ عجم ج مس نہ (وج قط نہ جب ث۔ لا)

نیز  $\frac{ج ب}{۵} = \frac{ج ب}{۴} = \frac{ج ب}{۶}$

اس طرح ۲۴ من ۱ = ۲۴ من ۱ = ۱۵ من ۵ ج  
اس لیے من ۱۵ من ۱ اور من ۱۵ من ۵ سے عدد آچھٹا ہے اور اس لیے  
زاویہ ب زیادہ سے زیادہ من کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

## گیارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔  
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۱۲ = ۲۵.۴۹۲۱۸۰$$

$$\text{لوک } ۹۹ = ۹.۹۷۷۰۸۳ = \text{فرق } ۱۰.۴۲۵ \text{ کے لیے} = ۲۰۰۰۰$$

۲۔ اگر ایک مثلث میں ۷ = ۷۵ = ب = ۱۶ = ج = ۹۰ تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔  
یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۲۱۳ = ۲۴.۴۷۷۰۸۳ = \text{ل مس } ۶۰$$

$$\text{لوک } ۹۸۰ = ۲۸.۴۷۷۰۸۳ = \text{ل مس } ۶۱$$

۳۔ ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۳۵ = ۱۳.۳۳۳۸ = \text{لوک } ۱۲۸۰ = ۱۲.۴۷۷۰۸۳$$

$$\text{ل جم } ۱۰ = ۹.۹۷۷۰۸۳ = \text{ل جم } ۱۰ = ۹.۹۷۷۰۸۳$$

۴۔ اگر ب = ۵ = ج = ۱۰ = ۲۰۰ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۳۰.۱۰۳۰۰ = \text{لوک } ۲۵۴۱۳۱۳ = ۱۷.۲۵۴۱۳۱۳$$

$$\text{ل جب } ۵ = ۹.۹۷۷۰۸۳ = \text{لوک } ۲۵۴۱۶۶۶ = ۱۷.۲۵۴۱۶۶۶$$

۵۔ اگر ایک مثلث میں ب = ۲۵ فٹ، ج = ۷۵ فٹ، ۱ = ۲۴ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ل م ۴ = ۱۰۵۲۹۲۸۳۲
- ل م ۳ = ۹۵۲۸۹۴۲۳ ل م ۲ = ۹۵۳۹۰۲۶۰
- ۶۔ اگر ایک شلث کے دو ضلعوں کے طو لوں میں نسبت ۷:۹ ہو اور ان کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہو تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ
- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ل م ۳ = ۱۰۵۲۹۲۸۳۲
- ل م ۵ = ۵۳۱۵۹۴۲۳ فرق ۱ کے لیے = ۴۹۶
- ۷۔ ایک شلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے، رقبہ ۳۱۰ اور گھیرا ۲۰، باقی زاویے اور ضلع معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ
- لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ل جب ۹ = ۹۵۸۷۸۴۳۷
- لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ ل جب ۹ = ۹۵۸۷۸۴۳۷
- ۸۔ ایک شلث ا ب ج میں یہ دیا گیا ہے کہ ۱۰ = ا ف ت ب = ۹ ف ت ج = م ن ا (۳) معلوم کرو۔ اگر ا اور ب کے ناپے میں ایک انچ سے بڑی اور ج کی پیمائش میں اس سے بڑی خطائیں نہ ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی محسوب کردہ قیمت میں جو خطا ہے وہ ۲۵۷ انچ سے کم ہوگی۔
- ۹۔ اگر ہم صورت میں شلث کے اجزاء ا ب، ب دیے گئے ہوں جہاں ۱۰ = ب اور تیسرے ضلع کی قیمتیں ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ ج = ۲ ج ج جم ۲ ب + ج = ۴ ب ب جم ۲ ب
- ۱۰۔ مہم صورت میں جس میں ۱۰ = ب، ا دیے گئے ہوں اگر ایک شلث کا ایک زاویہ دوسرے شلث کے متناظر زاویہ کا دوگنا ہو تو ثابت کرو کہ
- لو ۳ = ۳۱۵ = ب جب ۱۰ یا ۴ ب جب ۱ = ۱۰ (۱ + ۲ ب)
- ۱۱۔ ایک شلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع کے مساوی ہے اور دوسرے دو ضلع معلوم طو ل کے ہیں شلث کے دیگر اجزاء معلوم کرو ان مضابطوں سے جو نوکارتی حل حساب کے لیے موزوں ہوں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں جو نسبت ہے اس کو ۱ (۱ + ۲) اور ۱ (۱ + ۲) کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔
- ۱۲۔ زمین کے ایک مثلثی ٹکڑے میں اس کا طو ل ترین ضلع ۱۰ گز ہے دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ ۱۰۰ گز ہے اور اس کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔ دوسرے زاویے



معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$ل\text{ مس } ۲۳ = ۹۱۶۳۷۸۵۱۹$$

$$ل\text{ مس } ۱۵۱۳ = ۹۱۳۷۱۹۳۳۳ \quad ل\text{ مس } ۱۶۱۳ = ۹۱۳۷۲۲۹۹۲$$

۱۳۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۲۶ ہے، مقابل کا ضلع ۴ اور ارتفاع ۱۵ ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۴۔ اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع  $\frac{1}{2}(۳-۵)$  × گھیرا سے کم ہو تو بتاؤ کہ زاویوں (184)

سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے لیکن اگر ہر ضلع  $\frac{1}{2}$  گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔

۱۵۔ اگر اجزاء ج = ۲۵، ب = ۲، ج = ۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو بتاؤ کہ ج کی قیمت میں ۱۰ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً ۲۵۳ کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضابطوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع ۵۴۲ فٹ اور مقابل کا زاویہ ۵۹ ۵۹ ۵۹ ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷۔ ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸۔ ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزاء 'ب'، 'ا' سے حل کیا گیا ہے۔ اگر 'ا' ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں 'لا'، 'ما' سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے 'ا' سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

$$لا جب\text{ ب } ب\text{ جم } ج = ما (جب\text{ ب } جب\text{ ج})$$

۲۰۔ ایک کشتی جنوب سے ۵۰ مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۲۵° مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے۔ کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ 'گزوں تک صبح' معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

$$\text{ل جب } ۲۰ = ۹۵۳۲۰۵۲ \text{ ' لوک } ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰$$

$$\text{لوک } ۲۹ = ۲۵۳۱۳۸۹۶ \text{ ' لوک } ۲۰۶ = ۲۵۳۱۵۹۰۰$$

۲۱۔ ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۲۰ ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۹۰ اور ۵۰ ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیوں معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک انقباضی ستون کا پائین ا ہے۔ ب اور ج 'ا کے ٹیک مشرق میں ہیں اور 'د' ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج کے ارتفاع کا دو گنا ہے اور وہ زاویہ سن 'ا' ہے جو ا ب کے عمادی 'د' پر بنتا ہے نیز ج ج = ۲۰ فٹ 'ج' د = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ۵۰ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ پر جس کا ارتفاع ۴۰ معلوم ہے اچڑھا جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی شمال میں زاویہ ارتفاع ۲۰ پر دکھائی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر سے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی ف جب م جم بہ قم (ہو۔) ہے۔

۲۴۔ دو مستقیم متقاطع پٹریوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹریوں کے مقام اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے عمادی دوسری پٹری پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ ۴۰ بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی پشت پہنچتی ہے تو زاویہ ۲۰ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹریاں ایک

دوسرے سے زاویہ ط پہ مائل ہیں جہاں ط، مسادات ۱ مم ط = مم عہ مم عہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک اسطوانی منیڈر ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آرہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویائی ارتفاع میدان کے اوپر عہ، عہ، عہ ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، ج، ج فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ج}^2 - \text{ج}^2) \text{ مم}^2 + (\text{ج}^2 - \text{ج}^2) \text{ مم}^2 + (\text{ج}^2 - \text{ج}^2) \text{ مم}^2 = 0$$

۲۶ — ایک خیارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دیکھا گیا؛ دس منٹ بعد ٹیک شمال میں ارتفاع بہ پردہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کر کے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

۶

۳۱ مس عہ - مس بہ

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔

۲۷ — مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خط مستقیم میں زاویائی ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویائی نشیب بہ اور جب دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطح آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

$$2 \text{ ج}^2 \text{ مم}^2 \text{ جب (بہ - جہ)}$$

$$\text{جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ)}$$

۲۸ — ایک برج کے جنوب میں مقام ۱ سے برج کا زاویائی ارتفاع ۳۰ ہے اور مقام ۲ پر جو ۱ سے ۱ فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے برج کا ارتفاع ۱۸ ہے۔ بتاؤ کہ برج کی بلندی  $\frac{1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$  ہے۔

۲۹۔ ایک برج جو اونچا ہے اور زمین سے ۵ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس فاصلے پر برج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائیں گے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰۔ ایک شخص سطح میدان سے جس پر ایک برج ہے اور برج پر ایک بنیاد ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ برج کے پائین سے لونیٹ فاصلے پر جوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ برج کے پائین سے ب فٹ اور پڑے بیٹے سے وہ دیکھتا ہے کہ بنیاد کے محاذی اس کی آنکھ پر حسبِ صوابت وہی زاویہ بنتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم میں ہیں؛ ثابت کر دو کہ اگر مشاہد کی آنکھ میں سے گزرنے والے افقی مستوی کے اوپر برج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اسی مستوی کے اوپر  $\frac{J}{B}$  فٹ ہوگی۔  
۳۱۔ ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مصلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے، وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مصلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہوتا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے  $A$  اور  $B$  ہوں اور سورج کا ارتفاع  $H$  ہو تو ثابت کر دو کہ مخروط مصلع کی بلندی ہے

$$10. \text{ مس } H = \frac{A}{B} (5 - 2 + B) \text{ فٹ}$$

۳۲۔ ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویہ  $30^\circ$  ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویہ  $45^\circ$  ہے۔ آئیں گچ پہاڑی کا میلان معلوم کر دو۔

۳۳۔  $AB$  ج  $20$  ایک کرو کا مستطیلی فرش ہے جس کا طول  $AB$  ۱۰ فٹ ہے۔ کرو کی بلندی معلوم کر دو اگر گچ پر کمرے کی بلندی کے محاذی کو  $A$  پر زاویہ  $30^\circ$  اور کو  $B$  پر زاویہ  $45^\circ$  ہے۔ اگر  $AO = 10$  فٹ،  $BO = 10$  فٹ، تو ثابت کر دو کہ بلندی تقریباً ۸ فٹ ہے۔

۳۴۔ ایک برج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان  $30^\circ$  ہے

او فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو بُرج کے اوپر سے ایک تالاب میں دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ بُرج سے جابجہ ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ بُرج کی بلندی جابجہ ہے۔

و + ب + ج + جم ع

۳۵۔ ایک شخص دو برجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک برج اُس کی آنکھ پر زاویہ بنا رہا ہے؛ پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر جو برجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ جو پر مائل ہے ۱ فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ یہ بنتا ہے؛ برجوں کی لمبائیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو۔

فت (مم به - مم ع) = ۲۱

(ف-ت) (م-ب - م-ا) = ا و م ح ج ب

جن میں ف، ف سے برجوں کی بلندیاں تعمیر ہوتی ہیں۔

۳۶ — ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پل کے دو ستونوں کے زواویہ نشیب ۷۰° ۱۰' مشاہدہ کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ۱۰۰۰ میٹر ہے۔ نقطہ پر راویہ طہ بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

$\frac{1}{4}$  لم نقط  $\frac{1}{4}$  ط  $\frac{1}{4}$  جيبه جيبه

جہاں جم فہم جم لہ [جب عجب بہ (جب عجب بہ)]

۴۔ ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین بُرج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے منشیب  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ہیں؛ اگرچہ 'ج' برجوں کی بلندیوں ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$= \frac{\text{جب (م - م)}}{\text{ج جب م}} + \frac{\text{جب (م - م)}}{\text{ج جب م}} + \frac{\text{جب (م - م)}}{\text{ج جب م}}$$

۳۸۔ ایک نقطہ سے ایک توپ ۱۰ داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آئے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفے ہوئے وہ علی الترتیب ت، ت ہیں؛ خط مستقیم ب ج میں اسے معلومہ فاصلہ ۱ پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب = د، اور ج = د ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{ \frac{(ب - ج) (و - ب ج)}{ب ت - ج ت} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

اُس صورت کا امتحان کرو جب، و = ب ج

۳۹۔ ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکونی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع ۴۰ مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف وٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع بہ معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ف ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$\left\{ \frac{1}{\tan} \times \frac{\text{جب } ۴۰ \text{ جب } ۴۰}{\text{جب } (د - ۴۰)} \right\} \text{جم}$$

۴۰۔ ایک کروڑی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع ۴۰ اور گنبد کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد کی طرف فاصلہ ۱ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے مین اوپر ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع بہ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{\text{و جب } ۴۰}{\text{جب } (د - ۴۰)} \times \frac{\text{جب } ۴۰ \text{ جب } ۴۰}{\text{جم } ۴۰ - \text{جم } ۴۰}$$

۴۱۔ کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع ۴۰ ہے۔ ایک شخص اس وقت

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شکاف دیکھتا ہے جو اس کے جنوب میں ۱۰ فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصافاً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شکاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن دماغ اُس کی آنکھ پر ۲ ذ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} (\text{م}^{\circ} \text{ع}^{\circ} \text{م}^{\circ} \text{ذ}^{\circ} - \text{م}^{\circ} \text{ط}^{\circ}) - ۲ \text{ و لام} \text{ع}^{\circ} \text{م}^{\circ} \text{ذ}^{\circ} + \text{و} (\text{م}^{\circ} \text{ذ}^{\circ} - \text{م}^{\circ} \text{ط}^{\circ}) = ۰$$

۴۲۔ ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دویدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصابی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصابی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی القوائم ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی ٹرک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں۔ ثابت کرو کہ پہاڑی

افقی سمت کے ساتھ زاویہ جب  $\frac{1}{2} (1 + 2 \text{ ب}^{\circ} - 2 \text{ ب}^{\circ} \text{جم}^{\circ} \text{ع}^{\circ})$  پر مائل ہے۔

۴۳۔ ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ۱۰ طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوط مستقیم جزاویہ قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اُس آلہ سے جس سے زاویے ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے  $(1 + n)$  گنی حاصل ہوئی ہوں جہاں  $n$  بہت چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$n \times \frac{\text{ب}^{\circ} \text{جیب}^{\circ} \text{ع}^{\circ} - \text{ع}^{\circ} \text{جیب}^{\circ} \text{ب}^{\circ}}{\text{جیب}^{\circ} (\text{ع}^{\circ} - \text{ب}^{\circ})}$$

کے بہت قریب ہے؛ عہ بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴۔ ایک مشاہدہ ایک جہاز کے عرشہ سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دُور کے روشنی کے ہیلو کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جہڈے کے ڈبیلے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشہ سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمندر کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ ان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر... ۴۴ میل ہے۔

۴۵ — ایک یدھی نہر کے کنارے پر تین کعبے ایک ایک میل کے فاصلے پر گائے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلا اور تیسرے کعبوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کعبے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ — تین نقطوں ۱، ۲، ۳ پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سورج ڈال کر مورم کی ٹکائیں لگایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب ۱، ۲، ۳ گہرائیوں پر ہے؛ نیز ۱ = ب، ۲ = ج، ۳ = ک، ۱ = ج، ۲ = ب، ۳ = ک اگر مورم کی تہ کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان ۹۰ مساوات میل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$188) \text{ مس } ۹۰ = \left\{ \frac{(۱-ب)}{۱} - ۲ \frac{(۱-ب)(۲-ج-ب)}{۱۰۰۰۰} + \frac{(ج-ب)}{۱۰۰۰۰} \right\} \text{ کم قہ}$$

۴۷ — ایک ستون کا زائدی ارتفاع ۷ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور ۲ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{ج جب ۷ جب ۲}{ج (ج-ب) (ب-ج) (ج+ب) ۱۰۰۰۰}$$

۴۸ — ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف ۲۲ ۱/۲ کا زاویہ بناتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے



پہرہ مڑتی ہے اور جہنگاہ میں اس کی طرف حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۶ میل ہے۔

۴۹۔ نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا رستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اس شخص کو نظر آسکتے ہیں  $\frac{1}{2}$  واں ہے جہاں

$$\left\{ \frac{2 + \frac{b^2}{a^2}}{b + 1} \times \frac{f + d}{2} \right\} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

بشرطیکہ  $f > d(1 + \frac{d^2}{b^2})$  اور  $\frac{d}{1 + \frac{d^2}{b^2}} < \frac{d}{1 + \frac{d^2}{b^2}}$

۵۰۔ ایک کروکی حلقے (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے لیے یہ عین ممکن ہو جائے کہ وہ حلقے میں سے جاسکے (۱) سیدھا، (۲) ایک تار کو ٹکرائے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرائے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱۔ تین پہاڑوں کی چوٹیاں 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مشاہد کو ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات 'ف' اور 'ق' میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، 'ا'، 'ب' اور 'ج' کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور زاویے 'اق'، 'ف'، 'ج'، 'ق'، 'ق'، 'ف'، 'ج'، 'ا' علی الترتیب فائدہ پہنچیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

$$م ۲ + م ۱ : م ۳ + م ۲ : (م ۳ + م ۲) : (م ۳ + م ۲) : م ۳ + م ۲ : م ۲ + م ۱$$

یز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط (ج کو د پر قطع کرے تو) ج ح د جب ۲ء (م پ ۴ + م ۲) ۵۲ — ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹری سے ج حاصلہ پر کھڑا ہوا ایک ٹرین دیکھتا ہے جو پٹری پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹری کے اُس نقطہ سے ۱۰ فاصلے پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص ٹرین کے محاذی جو زاویہ نبٹا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ ۴ کے مشاہدہ کرنے میں اُس سے ایک چوٹی خط ط سرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خطا وقوع پذیر ہوگی اس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

ج ط

جب ۴ (ج جم ۴ - وجب ۴)

۵۳ — ایک پہاڑ کی بلندی ف سب ویل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خط ب ج (و) زاویہ ۱ ب ج ' ج ب اور زاویہ (ی) جو ۱ ب، انتصابی خط کے ساتھ بنانا ہے بتاؤ کہ

ف =  $\frac{\text{وجم ی جب ج}}{\text{جب (ب + ج)}}$ 

(189) اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ب ج کی مناسب ترین سمت

ب = ۲ مس ۱  $\left( \frac{\text{وجم ی - ف}}{\text{وجم ی + ف}} \right)$ 

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمائش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

۵۴ — تین انتصابی جہتوں سے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں تین نقطے ۱، ۲، ۳ ہیں جن میں سے ہر ایک پر ان تین جہتوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں؛ اور یہ خطوط مستقیم افق کے ساتھ علی الترتیب زاویے ع، ب، ج بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں پر جو مستوی گزرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

ب ج

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \quad \text{م م ط}$$

اور دو متشابہ جملے۔ تبادُل جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہئیں۔  
 ۵۵۔ ایک برج (ب) ایک افقی مستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینار (ج) ہے۔ ایک پہاڑ جس کا رخ ایک مائل مستوی خیال کیا جاسکتا ہے ایک مشاہد مقام ع پر کھڑا دیکھتا ہے کہ (ب) (ج) میں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ ع بناتا ہے؛ اب وہ مقام ف تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ع ف (= ۱۲) کی پیمائش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر (ب) (ج) اس کی آنکھ پر وہی زاویہ ع بناتے ہیں؛ اب وہ زاویوں (ف ع) (= بی) اور (ج ف ع) (= ج) کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر (ب) (ج) کی بلندیاں لا اور ما ہوں تو تبادُل کہ

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \quad \text{م م ج}$$

نیز اگر ع ف کا نقطہ وسطی ث ہو اور ث میں سے گزرنے والے خط میلان اعظم پر وہ نقطہ ہو جس پر (ب) (ج) مساوی زاویے ع بناتے ہیں اور اگر ث = ب تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان ط مساوی ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right\} \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta} \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta} \frac{1}{\sin \gamma}$$

(190)

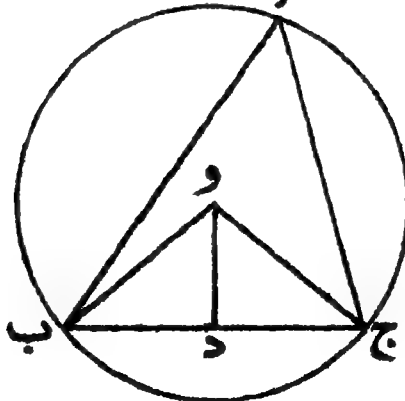
## بارہواں باب

### مثلثوں اور ذواربعتہ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰۔ اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے اُن مسئلوں کو بلا ثبوت مان لینگے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مسئلوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

### مثلث کا حائلہ دائرہ

۱۵۱۔ ایک مثلث کے حائلہ دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ سر  $\frac{1}{4} \sqrt{3} a$  دفعہ ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:



(292)

فرض کرو کہ دوائر کا مرکز ہے؛ مثلث ا ب ج کے ضلع  
ب ج پر عمود و د کھینچو، تو ب ج کا نقطہ وسطی دے اور زاویہ ب و د = ۹۰  
چونکہ باد = وب جب ب و د، اس لیے

$$\frac{1}{2} = \text{مس جب ا} \text{ یا مس} = \frac{1}{4} \text{ و قم ا} \dots (1)$$

اگر مثلث کا رقبہ مس سے تعبیر ہو تو

$$\text{مس} = \frac{1}{4} \text{ ب ج جب ا}$$

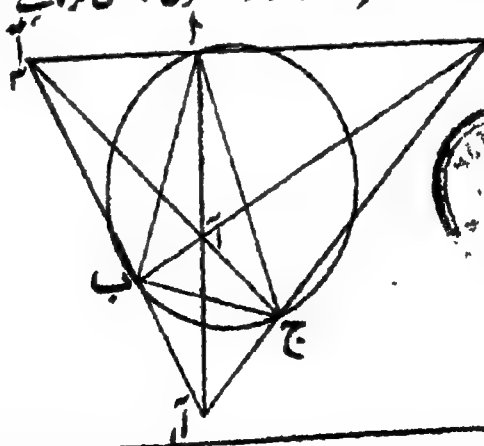
اس طرح حائل دائرہ کے نصف قطر کے لیے ہیں جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس} = \frac{\text{ا ب ج}}{4 \text{ مس}} \dots (2)$$

$$\text{نیز} \quad \text{ود} = \text{وب جم ا} = \text{مس جم ا}$$

مثلث کے اندرونی اور جانی دائرے

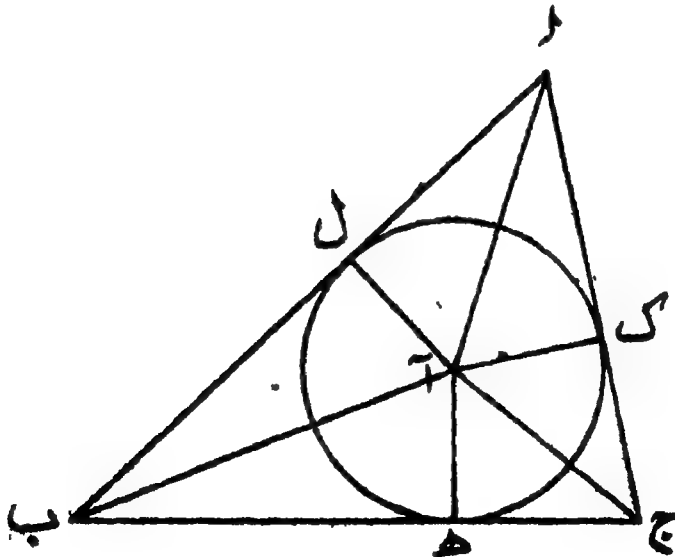
۱۵۲ — ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو  
مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جاسکتے ہیں؛ اندرونی دائرہ ہر ضلع  
کو داخلی طور پر مس کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز آ ہے؛ ہر جانی دائرہ مثلث  
کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے، فرض کرو کہ



ان جانبی دائروں کے مرکز آ، آ، آ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ، آ، آ ب، آ ج، علی الترتیب زاویوں ۱، ۲، ۳ کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ، آ، آ ج علی الترتیب زاویوں ۲، ۳، ۱ کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ، آ، آ کے راسوں آ، آ، آ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود آ، آ، آ ب، آ ج، آ ج ہیں اور اس مثلث آ، آ، آ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث اب ج کا حائط دائرہ، مثلث آ، آ، آ کا نقطہ نظری دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائط دائرہ ضلعوں آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ، آ، آ، آ، آ، آ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۳۔ فرض کرو کہ مثلث اب ج کے ضلعوں اب، ب ج، ج ا کو اس کا اندرونی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ہ، ک پر مس کرتا ہے۔



تب  $\Delta$  آب ج +  $\Delta$  آج ا +  $\Delta$  آاب = سی  
 اب چونکہ  $\Delta$  آب ج =  $\frac{1}{2}$  آھ  $\times$  ب ج =  $\frac{1}{2}$  ر ا،  
 $\Delta$  آج ا =  $\frac{1}{2}$  ر ب، اور  $\Delta$  آاب =  $\frac{1}{2}$  ر ج،  
 جہاں ر اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس لیے  
 $\frac{1}{2} ر = (ج + ب + ا) = سی$

یعنی  $\frac{سی}{س} = \frac{1}{2} ر$  ..... (۳)

جس سے اندرونی دائرہ کا نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

$$ا = بھ + جھ = ر (مم \frac{1}{2} ب + مم \frac{1}{2} ج)$$

اس لیے  $ا = ر (جب \frac{1}{2} ب + جب \frac{1}{2} ج)$  ..... (۴)

یہ کے لیے دوسرا جملہ ہے جو (۳) سے بھی اخذ ہو سکتا ہے۔  
 ضابطوں (۱) اور (۴) کو ملائے سے ہمیں متشاکل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$ا = ر (جب \frac{1}{2} ا + جب \frac{1}{2} ب + جب \frac{1}{2} ج) \dots (۵)$$

نیز چونکہ اک + ب ج =  $\frac{1}{2}$  (ب ج + ج ا + ا ب)

اس لیے اک = ال = س - ر

اور اسی طرح بھ = بل = س - ب، جھ = جک = س - ج،

پس چونکہ  $ا = ر (اک \frac{1}{2} ا + بھ \frac{1}{2} ب + جک \frac{1}{2} ج)$

ہمیں جملے حاصل ہوتے ہیں

$$ا = ر (س - ا) (س \frac{1}{2} ا + (س - ب) (س \frac{1}{2} ب + (س - ج) (س \frac{1}{2} ج) \dots (۶)$$

ان کو (۳) اور (۴) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے۔

۱۵۴ — دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں  $\frac{1}{2}p$ ،  $\frac{1}{2}q$ ،  $\frac{1}{2}r$  کے لیے جملے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث  $ABC$  کے ضلعوں  $BC$ ،  $CA$ ،  $AB$  کو وہ دائرہ جس کا مرکز  $O$  ہے نقطوں  $H$ ،  $K$ ،  $L$  پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC = AL = s$$

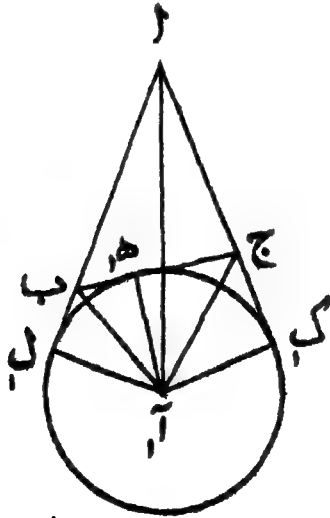
اس لیے  $\frac{1}{2}p = (b + c - a) = s$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$\frac{1}{2}p = s, \frac{1}{2}q = s - b, \frac{1}{2}r = s - c \quad \dots \dots (۷)$$

نیز چونکہ  $a = b + c - 2r$  (مس  $AL = s$ ،  $BL = s - b$ )

اس لیے  $a = 2s - 2r$  یا  $r = \frac{1}{2}(s - \frac{1}{2}a) \dots \dots (۸)$



اس سے ضابطہ ملتا ہے



۱ = ۴ سا جب ۱/۲ ۱ جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج ..... (۹)  
اسی طرح ۱ اور ۱ کے لیے مناظر جملے حاصل ہوتے ہیں۔

پھر چونکہ

$$ب = ۱ = ب ل، اور ج = ۱ = ج ک، اور اک = ۱ = ال$$

اس لیے ب = ۱ = س - ج، ج = ۱ = س - ب، اک = ۱ = ال = س  
اس طرح ہمیں ضابطے ملتے ہیں،

$$۱ = س س = ۱ = (س - ج) (س - ب) = ۱ = (ب - س) (ب - ج) ..... (۱۰)$$

## مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} ۱ + ل + ل - ل &= ۴ سا \\ ل + ل + ل + ل + ل + ل &= س^۲ \\ ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل &= ر^۲ \end{aligned}$$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لیے حسب ذیل جملے جو جانبی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں ہیں ثابت کرو:۔

$$(۱) \quad \frac{ل}{(ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل)} = ۱ \quad (۱) \quad \frac{ل (ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل)}{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل} = ۱ \quad (۲) \quad \frac{ل}{(ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل)} = ۱ \quad (۳)$$

$$(۲) \quad \frac{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل}{(ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل)} = ۱ \quad (۲)$$

$$(۳) \quad \frac{ل (ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل)}{ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل + ل} = ۱ \quad (۳)$$

(۴) ثابت کرو کہ  $۱۶ س^۲ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(۵) ثابت کرو کہ  $۱ = \frac{۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲}{۴س^۲}$

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع  $۱$  کو مس کرتا ہے حائلہ دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ  $۱ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(۷) ثابت کرو کہ  $۱ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$   $۱ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$   $۱ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$   $۱ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے  $۱$  سے  $۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$  ہوں اور  $۱$  سے  $۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$  ہو تو ثابت کرو کہ

(۱)  $۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(ب)  $۱۶ س^۲ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(ج)  $۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ = ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲ + ۴س^۲$

(۹) بتاؤ کہ اس مثلث کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$  یا  $۸ س^۲ + ۱۶ س^۲ + ۱۶ س^۲ + ۱۶ س^۲$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر  $۱$  کا دو گنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبے  $\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$ ،  $\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$ ،  $\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$ ،  $\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$  ایسے بدلتے ہیں جیسے  $\frac{۱}{۲}$ ،  $\frac{۱}{۲}$ ،  $\frac{۱}{۲}$ ،  $\frac{۱}{۲}$

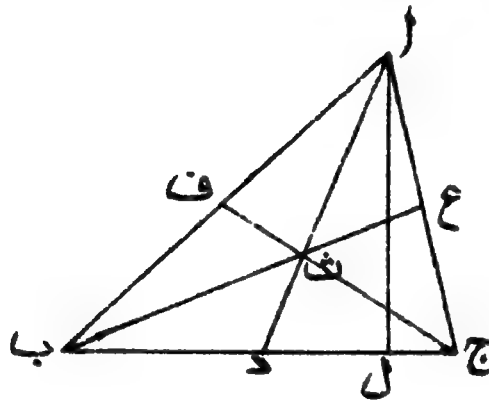
(۱۲) ثابت کرو کہ  $(۱) \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱$

(ب)  $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$



## خطوط وسطی

۱۵۵ — ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم 'ا د'، 'ب ع'، 'ج ف' خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔



خط وسطی 'ا د' کا طول، مشہور مسئلہ 'ا ب' + 'ا ج' = ۲ (ا د' + ب د') سے حاصل ہوتا ہے، اس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$م_ا^2 = \frac{1}{4} ب^2 + \frac{1}{4} ج^2 - \frac{1}{4} ا^2 = م_ب^2 = \frac{1}{4} ا^2 + \frac{1}{4} ج^2 - \frac{1}{4} ب^2$$

$$م_ب^2 = \frac{1}{4} ا^2 + \frac{1}{4} ج^2 - \frac{1}{4} ب^2 = م_ج^2 = \frac{1}{4} ا^2 + \frac{1}{4} ب^2 - \frac{1}{4} ج^2 \dots (۱۱)$$

سے ملتے ہیں جہاں 'م'، 'م'، 'م' خطوط وسطی کے طول ہیں۔ فرض کرو کہ

$$م_ا = م_ب = م_ج = م \quad \text{تب} \quad \frac{ا^2}{4} = \frac{ب^2 + ج^2 - ا^2}{4} \quad \text{یا} \quad ا^2 = ب^2 + ج^2 - ا^2$$

جہاں ال' ب ج پر عمود ہے، پس م' مساوات  

$$\text{مم م} = \frac{1}{2} (\text{مم ب} - \text{مم ج}) \quad (۱۲)$$
 سے حاصل ہوتا ہے۔

نقطہ ث جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں  
 مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی  
 میں سے ہر ایک کو ث' نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

(196)

### مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم ا ث ف + مم ب ث د + مم ج ث ع = مم ا  
 + مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے مرکز ع' ہ' جہ  
 ہوں اور مثلثوں ا ب ج، ع ہ جہ کے رقبے ق' ق' تو ثابت کرو کہ

$$۴ ق ق' = (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)$$

(۳) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے نصف قطر ہ' ہ' ہ' ہوں  
 تو ثابت کرو کہ

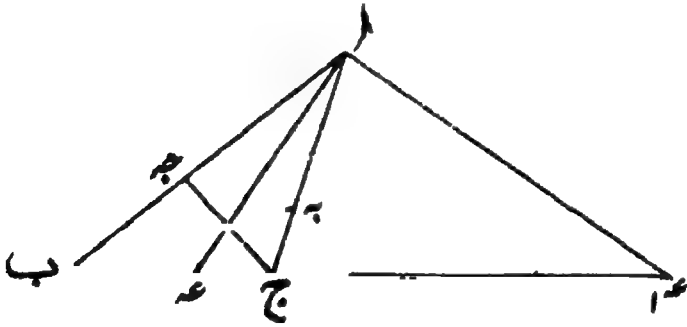
$$= \frac{ا(ب-ج)}{۲} + \frac{ب(ج-ا)}{۲} + \frac{ج(ا-ب)}{۲}$$

(۴) اگر زاوے ب ا د، ج ب ع، ا ج ف علی الترتیب ع' ہ' جہ اور زاوے  
 ج ا د، ا ب ع، ب ج ف علی الترتیب ع' ہ' جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم م} + \text{مم ہ} + \text{مم جہ} = \text{مم ع} + \text{مم ہ} + \text{مم جہ}$$

## زاویوں کے ناصف

۱۵۶۔۔۔۔۔ فرض کرو کہ زاویہ  $\angle$  کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں  $e$  اور  $m$  پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں  $\angle$   $e$ ،  $b$ ،  $b$ ،  $c$  کے طول  $f$ ،  $g$ ،  $h$  ہیں اور خارجی ناصفوں  $\angle$   $m$ ،  $b$ ،  $b$ ،  $c$  کے طول  $f$ ،  $g$ ،  $h$ ۔ تب  $e$  اور  $m$  کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $\frac{b}{c} = \frac{1}{g} = \frac{b}{h}$  اس لیے

$$b = \frac{1}{b+c} \cdot g = \frac{1}{b+c} \cdot h = \frac{1}{b+c} \cdot (g+h) = \frac{1}{b+c} \cdot 2f$$


اور طول  $f$ ،  $f$  معلوم کرنے کے لیے

$$e = \frac{1}{b+c} \cdot g = \frac{1}{b+c} \cdot h = \frac{1}{b+c} \cdot (g+h) = \frac{1}{b+c} \cdot 2f$$

اس لیے  $f = \frac{1}{2} (b+c) = \frac{1}{2} (g+h) = \frac{1}{2} (2f) = f$

پس  $f = \frac{1}{2} (b+c) = \frac{1}{2} (g+h) = \frac{1}{2} (2f) = f$  (۱۱۳) ... (۱۱۴)

## مشائیں

(۱) اگر  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$  جو  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$  کے منسلک  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$  کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ۔

(۲) اگر زاویوں کے مناسفوں کو حائل دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول

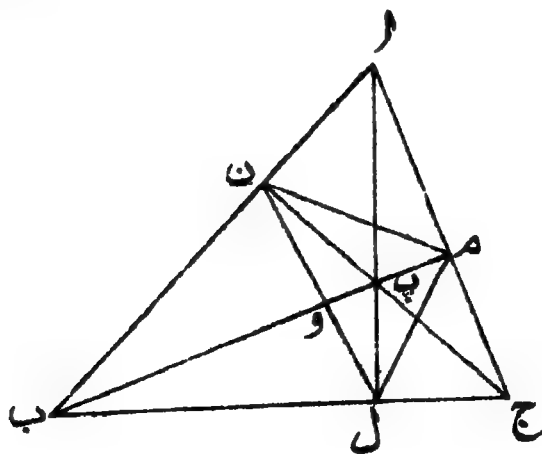
نہیں، ہم ہوں تو ثابت کرو کہ

ق. ا. حم  $\frac{1}{p}$  + ا. گ. ا. حم  $\frac{1}{p}$  + ب. ه. ا. حم  $\frac{1}{p}$  = ج. ر. ا. ب. ه. ا. حم  $\frac{1}{p}$

اور فجم  $\frac{1}{4}$  + گجم  $\frac{1}{4}$  + بجم  $\frac{1}{4}$  + جم  $\frac{1}{4}$  ج = ۱ + ب + ج  
(۳) ثابت کرد کہ عہدہ ج جو نسبت ۲ ج : ۱ + ب میں قطع کرنا ہے۔

## مثالث پائیں

۱۵۷۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ال، 'ب' م، 'ج' ن کھینچے گئے ہیں، ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث ل م ن بنتا ہے اس کو 'ا'، 'ب'، 'ج' کا مثلث یا میں کہتے ہیں۔







(۲) اگر دائروں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے قطرے، یہ ہے  
ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ب ج}{ب م} + \frac{ج م}{ج ن} + \frac{م ن}{م ل} = ۱$$

(۳) اگر مثلث پائیں کے اندرونی اور باہری دائروں کے نصف قطرے، یہ ہے  
تو

$$\frac{ن م م م}{ن م م م} = \frac{ن م م م}{ن م م م}$$

(۴) اگر ا ل، ب م، ج ن، حاطہ دائرہ سے نقطوں ل، م، ن پر ملیں تو

$$\frac{ا ل}{ا م} + \frac{ب م}{ب ن} + \frac{ج ن}{ج ل} = ۲$$

## خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۸۔ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ،  
حاطہ دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک باہری دائرہ کا مرکز آ،  
مرکز ہندسی ٹ، اور نو نقطی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ آئیگلر کے مشہور مسئلے  
کی بموجب تین نقطے و، ٹ، پ ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں اور  
پ ٹ = ۲ و ٹ؛ نقطہ ع بھی وی پر واقع ہے اور اس کا وسطی  
نقطہ ہے۔ زاویوں آ ا و، آ ا پ میں سے ہر ایک،  $\frac{۱}{۲}$  (ب سے ج)  
کے مساوی ہے؛ نیز ا و = س ا، ا پ = ۲ س ا، ج م = ۱  
آ = رقم  $\frac{۱}{۲}$  = ۲ س ا جب  $\frac{۱}{۲}$  ب جب  $\frac{۱}{۲}$  ج،

آ = ۲ س ا جب  $\frac{۱}{۲}$  ب × ج  $\frac{۱}{۲}$  ج  
اب ہم نقطوں و، آ، پ، ع کے درمیان ایک دوسرے

سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

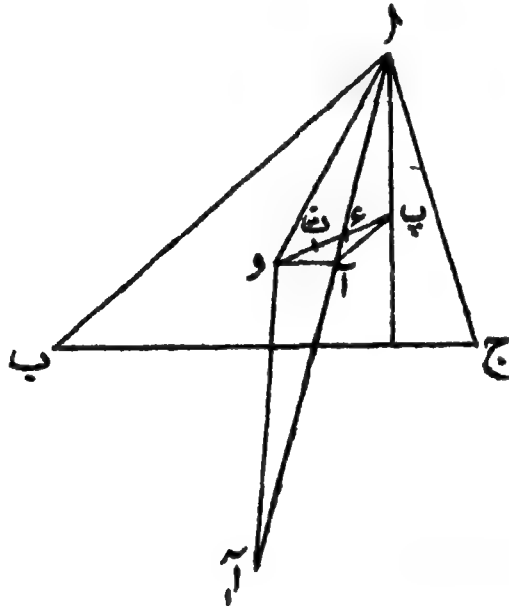
19)

(۱)  $\omega$  معلوم کرنا۔ فرض کرو  $\omega = \text{مضہ تو حاصل ہوتا ہے}$

$$\text{ضد} = ۱و' + ۱۱' - ۱۲و' \times ۱۱\text{م} و ۱۱$$

اس لیے منہ =  $\frac{1}{p} [1 + \frac{1}{p} \text{جب } \frac{1}{p} \text{ ب جب } \frac{1}{p} \text{ ج} - \frac{1}{p} \text{ب جب } \frac{1}{p} \text{ ج}]$   
 جم  $\frac{1}{p} (\text{ج} - \text{ب})$

یا ضلّا = سزا (۱-ا جب  $\frac{1}{4}$  ا جب  $\frac{1}{4}$  ب جب  $\frac{1}{4}$  ج)



پس ہمیں آئیٹر کا ضابطہ  $\text{ضد} = \text{م}^2 - 2\text{م} + 1$  .... (۱۵)

حاصل ہوتا ہے۔ (۲) و آ معلوم کرنا۔ فرض کرو آ = ضمہ تو

[illegible]

یا ضربه = سزا (۱ + ۸ جب ۱/۶، ۱/۴، ۱/۲ ب. م. ج) (ج)



نو نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آء، آء کے لیے جو جملے ہم نے حاصل کیے ہیں ان سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اندرونی اور جانبی دائرے نو نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں۔ پس نیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا، اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے جاتے ہیں۔

## مثالیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکزوں سے حائط دائرہ کے محاسن کھینچے جائیں اور ان کے طول ج، ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث آ و پ کا رقبہ ہے

$$۲ - \frac{1}{ج} \left( \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right) \left( \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right) \left( \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} \right)$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}$$

$$\text{اور } \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج} - \frac{1}{ج}$$

(۴) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ج}$$

(۵) اگر راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلے ع، ع، ع ہوں اور

مرکز عمودی سے اس کا فاصلہ ث ہو تو ثابت کرو کہ

ع<sup>۲</sup> + ب<sup>۲</sup> + ج<sup>۲</sup> = ث<sup>۲</sup> = ۳ س<sup>۲</sup>  
(۶) ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ حائل دائرہ کو قطع نہیں کرتا الا اُس صورت کے  
جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرج ہو اور اس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو  
زاویہ

$$\text{جم}^1 (1 + 2 \text{جم} + 3 \text{جم}^2)$$

پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہو تو  
ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹  
(۸) اگر نو نقطی دائرہ کا مرکز قی ہو تو ثابت کرو کہ

(201)

$$(ق\ ک - ق\ ل) (ق\ آ - ق\ ب) = ب\ آ - ج\ ب$$

(۹) اگر و آ پ ایک مساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^1 + \text{جم}^2 + \text{جم}^3 = \text{جم}^4$$

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائل دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے  
مساوی الفاصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ ——— مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعلقہ مختلف خطوط

اور زاویوں کی رقوم میں، جملوں کی ایک بہت بڑی تعداد معلوم  
ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis, Vol. III میں اور  
Annals of math. Vol. I. No. 6 میں لکھے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور ان کی تصدیق کا  
کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں :-

$$\text{مار}^1 \text{مار}^2 \text{مار}^3 \text{مار}^4 \text{مار}^5 \text{مار}^6 \text{مار}^7 \text{مار}^8 \text{مار}^9 \text{مار}^{10} \text{مار}^{11} \text{مار}^{12} \text{مار}^{13} \text{مار}^{14} \text{مار}^{15} \text{مار}^{16} \text{مار}^{17} \text{مار}^{18} \text{مار}^{19} \text{مار}^{20} \text{مار}^{21} \text{مار}^{22} \text{مار}^{23} \text{مار}^{24} \text{مار}^{25} \text{مار}^{26} \text{مار}^{27} \text{مار}^{28} \text{مار}^{29} \text{مار}^{30} \text{مار}^{31} \text{مار}^{32} \text{مار}^{33} \text{مار}^{34} \text{مار}^{35} \text{مار}^{36} \text{مار}^{37} \text{مار}^{38} \text{مار}^{39} \text{مار}^{40} \text{مار}^{41} \text{مار}^{42} \text{مار}^{43} \text{مار}^{44} \text{مار}^{45} \text{مار}^{46} \text{مار}^{47} \text{مار}^{48} \text{مار}^{49} \text{مار}^{50} \text{مار}^{51} \text{مار}^{52} \text{مار}^{53} \text{مار}^{54} \text{مار}^{55} \text{مار}^{56} \text{مار}^{57} \text{مار}^{58} \text{مار}^{59} \text{مار}^{60} \text{مار}^{61} \text{مار}^{62} \text{مار}^{63} \text{مار}^{64} \text{مار}^{65} \text{مار}^{66} \text{مار}^{67} \text{مار}^{68} \text{مار}^{69} \text{مار}^{70} \text{مار}^{71} \text{مار}^{72} \text{مار}^{73} \text{مار}^{74} \text{مار}^{75} \text{مار}^{76} \text{مار}^{77} \text{مار}^{78} \text{مار}^{79} \text{مار}^{80} \text{مار}^{81} \text{مار}^{82} \text{مار}^{83} \text{مار}^{84} \text{مار}^{85} \text{مار}^{86} \text{مار}^{87} \text{مار}^{88} \text{مار}^{89} \text{مار}^{90} \text{مار}^{91} \text{مار}^{92} \text{مار}^{93} \text{مار}^{94} \text{مار}^{95} \text{مار}^{96} \text{مار}^{97} \text{مار}^{98} \text{مار}^{99} \text{مار}^{100}$$

جہاں  $\frac{1}{2}م، \frac{1}{2}م، \frac{1}{2}م$  خطوط وسطی ہیں اور  $2ف = م + م + م$  (۲)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$  س

(۵)  $\frac{1}{2}ف + \frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}ج + \frac{1}{2}گ + \frac{1}{2}ج + \frac{1}{2}ا + \frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}ا + \frac{1}{2}ج$  (۶)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$  جہاں  $ف، گ، ہ$  زاویوں کے ماضف ہیں۔

(۶)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$  (۷)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$

(۸)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$  (۹)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$  (۱۰)  $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م$

## مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰۔ اگر مثلث  $ا ب ج$  کے مستوی میں کوئی نقطہ ہو تو یہیں متاثرہ رشتہ

$\Delta ق ب ج + \Delta ق ج ا + \Delta ق ا ب = \Delta ا ب ج$  حاصل ہوتا ہے جبکہ ان مثلثوں کے رقبے جن کا اس  $ق$  سے واجب علامت کے ساتھ لیے جائیں؛ مثلاً  $\Delta ق ب ج$  منفی ہوگا اگر  $ق$  اور  $ا ب ج$  کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں۔  $ق$  کو مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ  $ق$ ،  $و$  پر منطبق ہوتا ہے تو مذکورہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے

جب  $۱۲$  + جب  $۲$  ب + جب  $۲$  ج = جب  $۲$  ب + جب  $۲$  ج + جب  $۲$  ب

کیونکہ زاویے  $ب و ج$ ،  $ج و ا$ ،  $ا و ب$  علی الترتیب  $۱۲$ ،  $۲$ ،  $۱$  ہیں۔

ج ۲ -

(۲) فرض کرو کہ ق، آ پر ہے تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{1}{\text{ا}} \text{ جب } \frac{1}{\text{ب}} (\text{ب} + \text{ج}) + \text{جب } \frac{1}{\text{ب}} \text{ جب } \frac{1}{\text{ا}} (\text{ج} + \text{ا})$$

$$+ \text{جب } \frac{1}{\text{ج}} \text{ جب } \frac{1}{\text{ا}} (\text{ا} + \text{ب}) = ۲ \text{ جم } \frac{1}{\text{ا}} \text{ جم } \frac{1}{\text{ب}} \text{ جم } \frac{1}{\text{ج}}$$

(۳) فرض کرو کہ ق، ع پر ہے تو

$$\text{جب } \frac{1}{\text{ا}} \text{ جم } (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جب } \frac{1}{\text{ب}} \text{ جم } (\text{ج} - \text{ا}) + \text{جب } \frac{1}{\text{ج}} \text{ جم } (\text{ا} - \text{ب})$$

$$= ۲ \text{ جب } \frac{1}{\text{ا}} \text{ جب } \frac{1}{\text{ب}} \text{ جب } \frac{1}{\text{ج}}$$

۱۶۱۔ دفعہ سابق کا مثانہ رشتہ جو ایک ستوی میں کے کسی چار نقطوں ا، ب، ج، ق کے باہمی چھ فاصلوں کے درمیان قائم رہتا ہے متعدد شکلوں میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

$$(۱) \text{ مساوات } \Delta \text{ ق ب ج} + \Delta \text{ ق ج ا} + \Delta \text{ ق ا ب} = \Delta \text{ ا ب ج}$$

کو استعمال کرنے اور ان چار مثلثوں میں سے ہر مثلث کے رقبہ کو اس کے ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ ایک ایسی شکل میں ملتا ہے جس میں چار جذر المربع شامل ہوتے ہیں۔

(۲) اسی ربط کو منطق شکل میں حاصل کرنا ہو تو زاویوں ب ق ج،

$$\text{ج ق ا، ا ق ب کو علی الترتیب } \alpha, \beta, \gamma \text{ سے تعبیر کرو تو چونکہ } \alpha + \beta + \gamma = ۲\pi \text{ ہمیں حاصل ہوتا ہے}$$

$$۱ - \text{جم } \alpha - \text{جم } \beta - \text{جم } \gamma = ۲ \text{ جم } \alpha + ۲ \text{ جم } \beta + ۲ \text{ جم } \gamma = ۰$$

اب جم  $\alpha$  کی بجائے اس کی قیمت (ق ب + ق ج - ب ج) / ۲ ق ب بد ق ج درج کرنے سے اور علی ہذا جم  $\beta$  اور جم  $\gamma$  کی بجائے ان کی متناظر قیمتیں رکھنے سے ہمیں مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۶۲۔ کسی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی ماہر رشتہ لیکر اس سے دوسرا رشتہ اخذ کیا جاسکتا ہے اگر ان ضلعوں اور





میں ہم لو کی بجائے

(۱-)<sup>۱۰</sup>م. ۱ م. ۱۲ ... م.<sup>۱۰</sup> ۴ ۱

اور زاویہ ۱ کی بجائے  $\frac{1}{3}\pi(1+\frac{5}{3}) - 1\frac{2}{3}$  یا  $\frac{1}{3}\pi(1-\frac{5}{3})$  لکھ سکتے ہیں (بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت) مع دیگر ضلعوں اور زاویوں کی بجائے ان کے متناظر جملوں کے۔

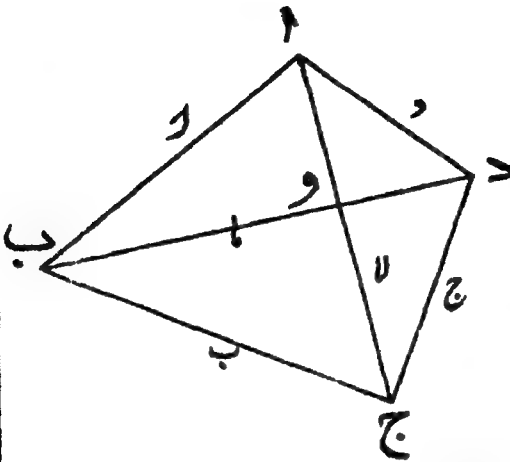
۱۶۳۔ مثلث کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کے درمیان کسی

عام رشتہ میں زادیوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳

پرسنل ان واقعات سے متنبہ ہوتا ہے کہ پہلی صورت میں زاویوں

۲۸۴- (پ + ق + ب + ج) - ۲۸۵- (ق + ب + ج) - ۲۸۶- (پ + ق + ب + ج)

(204)



۱۔ ضلعوں 'ا' ب 'ج' 'د' کو علی الترتیب  
'ب' 'ج' 'د' سے اور  
تتروں 'ا' ج 'ب' 'د'  
علی الترتیب 'ا' 'ب' 'ج' 'د' سے  
بیکر کر دو نیز فرض کرو کہ  
 $ا = ۲ = ح$  اور  $د = و$  و تتروں  
کا درمیانی زاویہ -

ہم ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ میں کے لیے ایک جملہ 'و' 'ب' 'ج'  
اور 'د' کی رقوم میں معلوم کریں گے۔ چونکہ

$$ا^۲ = و^۲ + د^۲ - ۲ و د \cos ا = ۲ - ۲ و د \cos ا$$

$$\text{لیجے} \quad و د \cos ا = ۱ - و د \cos ا = ۱ - (و^۲ + د^۲ - ا^۲) / ۲$$

ز د جب 'ا' + ب ج جب ج = ۲ سے  
ن مساواتوں کی تناظر طرفوں کا مربع لو اور جمع کرو تو

$$ا^۲ + د^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ۲ و د \cos ا - ۲ و د \cos ا = ۴ - ۲ و د \cos ا$$

$$۱۶ س^۲ = ۴ (و د + ب ج) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲)$$

$$۱۶ س^۲ = ۴ (و د + ب ج) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲)$$

$$۱۶ س^۲ = ۴ (و د + ب ج) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲) - ۲ (و^۲ + د^۲ - ا^۲)$$

$$\text{لیجے} \quad س^۲ = (و - س) (د - س) (ب - س) (ج - س)$$

$$- و ب ج د \cos ا = \dots (۱۹)$$

$$۲ س = ا + ب + ج + د$$

ہاں

اُس ذواربعتہ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

کھینچا جاسکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\pi = 2r$$

اس لیے  $\pi = (س-ا) (س-ب) (س-ج) (س-د) \dots (س-ن)$  جملہ (۱۹) سے یہ ظاہر ہے کہ وہ ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع دیے گئے

ہوں بڑے سے بڑے رقبہ والا ہوگا جبکہ  $\pi = \frac{1}{4} \pi$  یعنی جبکہ ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے۔

مسئلہ (۲۰) کو برہماگپتا (Brahme Gupta) نے جو چھٹی صدی عیسوی میں ایک ہندو جہندس گزرا ہے، دریافت کیا تھا۔

۱۶۵ — ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے لیے ایسے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں جن میں وتروں کے طول اور ان کا درمیانی زاویہ شامل ہوں۔

ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ان چار مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے جن میں یہ ذواربعۃ الاضلاع وتروں سے تقسیم ہوتا ہے اب چونکہ ان میں سے ہر مثلث کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times \text{وتروں کے ان دو مقطعوں کا حاصل ضرب جو مثلث کے ضلع ہیں} \times \sin \theta$$

جہاں  $\theta$  وتروں کا درمیانی زاویہ ہے اس لیے چاروں مثلثوں کے رقبوں کو جمع کرنے سے

$$\pi = \frac{1}{2} \times \text{لا اوجب فہ} \dots \dots \dots (۲۱)$$

$$\text{نیز چونکہ } ۱۹۲ \times \text{وب جم فہ} = \text{وا} + \text{وبا} - \text{ا}^۲$$

$$۲ \times \text{وج دد جم فہ} = \text{وج} + \text{ودد} - \text{ج}^۲$$

$$۱۹۲ \times \text{ودد جم فہ} = \text{د} - \text{ودا} - \text{ودا}^۲$$

$$۲ \times \text{دب وج جم فہ} = \text{ب} - \text{وبا} - \text{وج}^۲$$

اس لیے ۲ لا اجم فہ = ب<sup>۲</sup> + د<sup>۲</sup> - د<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup> . . . . (۲۲)

اس لیے ۳ = پ<sup>۲</sup> (ب<sup>۲</sup> + د<sup>۲</sup> - د<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup>) مس فہ . . . . (۲۳) 205  
اور فہ کو ساقط کرنے سے ہمیں بریشیٹنی ڈر (Bretschneider) کا ضابطہ

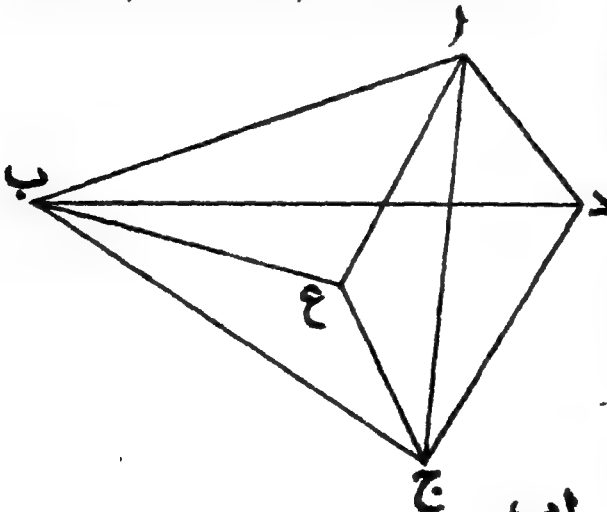
۳ = پ<sup>۲</sup> (۱ - ا<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> + د<sup>۲</sup> - د<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup>) ک<sup>۲</sup> . . . . (۲۴)  
حاصل ہوتا ہے جو ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم  
میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذواربعتہ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو ا + ج = ب + د اس لیے  
ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$۳ = پ<sup>۲</sup> (ا + ج - ب - د) مس فہ$$

$$۳ = پ<sup>۲</sup> [۱ - ا<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> - د<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup>] ک<sup>۲</sup> اور$$

۱۶۶ — ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ  
ضلعوں اور دو متقابل زاویوں کے حاصل جمع کی جیب التمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

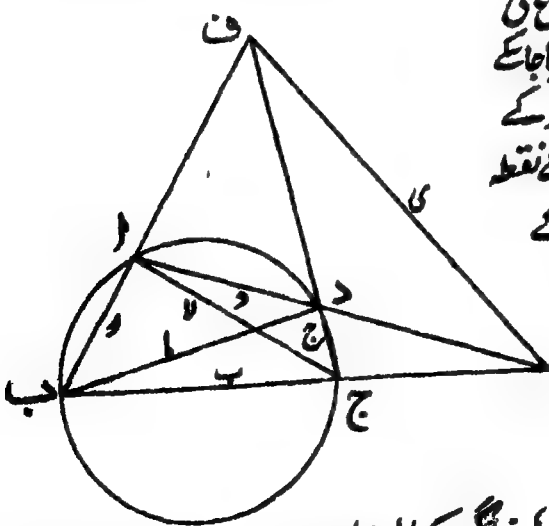


بیا اور ج سے  
خطوط مستقیم ب ع اور  
ج ع کیچھو ایسے کہ زاویہ  
ج ب ع ب ج ع  
علی الترتیب زاویوں  
ا ب د ا د ب کے  
سادی ہوں مثلث  
ج ب ا ب د  
تساوی ہیں اس لئے

$$\frac{ا ب}{ج ب} = \frac{ب د}{ج ع}$$

اس طرح  $ا د \times ج ب = ب د \times ج ع$   
 نیز چونکہ زاوے  $ج ب د$ ،  $ا ب ع$  مساوی ہیں اور  
 $ا ب : ب ع = ب د : ج ب$   
 اس لیے مثلث  $ا ب ع$ ،  $ج ب د$  متشابه ہیں اور اس لیے  
 $ا ب \times ج د = ب د \times ا ع$   
 اب چونکہ  $ا ج = ا ع + ع ج$ ۔  $۲ ا ع \times ع ج = (ج + ا) ج$

اس لیے  $ب د$  سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے  
 $لا^۲ = ا ج^۲ + ب د^۲ - ۲ ا ب ج د \cos ۲ ع$ ۔۔۔ (۲۵)  
 اگر  $۲ ع = \pi$  تو ٹولہ کا مسئلہ  $لا = ا ج + ب د$  حاصل ہوتا ہے جو  
 ایسے ذوالربعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے۔  
 اگر  $۲ ع = \frac{\pi}{۲}$  تو  $لا^۲ = ا ج^۲ + ب د^۲$  جو ایسے ذوالربعۃ الاضلاع  
 کے لیے صحیح ہے جس میں دو متقابلہ زاویوں کا حاصل جمع ایک زاویہ قائمہ ہو۔



۱۶۷۔ اُس ذوالربعۃ الاضلاع کی  
 صورتیں جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جاسکے  
 وتروں  $لا$ ،  $ما$  کے اور اُس تیسرے وتر کے  
 طولوں کو جو ضلعوں  $ا د$  اور  $ج د$  کے نقطہ  
 تقاطع کو ضلعوں  $ب د$  اور  $د ع$  کے  
 نقطہ تقاطع سے ملانے سے متشابه  
 ضلعوں کی رقوم میں معلوم  
 کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ تیسرا وتر  
 فگ ہے اور  $ا ج$ ،  $ب د$ ،  $ف گ$  کے طول علی الترتیب  $لا$ ،  $ما$ ،  $سی$  سے تعبیر ہوتے

ہیں۔ تب چونکہ

$$لا^۲ = ز^۲ + ب^۲ - ۲ \text{ اوب.جم ب}$$

$$لا^۲ = ج^۲ + د^۲ - ۲ \text{ ج.دجم د}$$

اور

$$\text{اس لیے } لا^۲ \left( \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{وب} \right) = \frac{ج^۲ + د^۲}{ج} + \frac{ز^۲ + ب^۲}{وب}$$

$$\text{پس } لا^۲ = (وج + بد) (ؤد + بچ) \backslash (ؤب + ج د) \quad (۲۶) \dots$$

اور اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$ما^۲ = (وج + بد) (ؤب + ج د) \backslash (ؤد + بچ)$$

نیز چونکہ

807)

$$ف۱ = د۱ = \frac{جب د}{جب (د + ۱)} = \frac{دلا}{ماجم د + لاجم ۱}$$

$$\text{اور اسی طرح } فب = \frac{ب۱}{ماجم د + لاجم ۱}$$

$$\text{اس لیے } ف۱ = \frac{ف۱}{دلا} = \frac{فب}{ب۱} = \frac{ف۱ - فب}{ب۱ - دلا} = \frac{۱}{ب۱ - دلا}$$

$$\text{پس } ف۱ \times فب = \frac{ؤب دلا}{۲(ب۱ - دلا)} ;$$

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے

$$\text{گج } \times \text{دگ ب} = \frac{ب۱ اوج لا}{۲(ؤا - ج لا)}$$

اب چونکہ ف۱ گ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک پہنچے ہوئے  
محاسن پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's Geometry

صفحہ ۹۲) اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = لا^۲ \left\{ \frac{ب۱ اوج}{۲(ؤا - ج لا)} + \frac{ؤب د}{۲(ب۱ - دلا)} \right\}$$

اب لا اور ما کی اُن قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{لا + ب ج} = \frac{ا}{ا + ب ج د} = \frac{ب ا - د لا}{(ب - د) (ا - ج)} = \frac{ا - ج لا}{(ا - ج) (ب - د)}$$

اس لیے ی کے مندرجہ بالا جملہ میں اندر ا ج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا = (لا + ب ج) (ا + ب ج د) \left\{ \frac{ا - ج لا}{(ا - ج) (ب - د)} + \frac{ب د - ا ج}{(ا - ج) (ب - د)} \right\} \dots (۲۷)$$

## مثالیں

(۱) اگر ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ

کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{4} \left\{ \frac{(ا + ب ج د) (ا + ج ب د) (ا + د ب ج)}{(ا - ج) (ا - ب) (ا - د)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطہ تقاطع کے درمیان فاصلہ ہے

$$\frac{(ا + ب ج د) (ا + د ب ج)}{(ا + ج ب د) (ا + ب ج د)} + \frac{(ا + ج ب د) (ا + د ب ج)}{(ا + ب ج د) (ا + ج ب د)}$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$\frac{(ا + ج + د) (ب + د + ا)}{(ا + ج + د) (ب + د + ا)} \text{ یا } \frac{(ا - ج) (ا - ب) (ا - د)}{(ا - ج) (ا - ب) (ا - د)}$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{(ا + ب ج د) (ا + ج ب د)}{(ا + ب ج د) (ا + ج ب د)}$$

(۴) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ میں ہو تو ثابت کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ

$$\text{مس } \left\{ \frac{(ا + د + ب ج) (ا ب + ج د)}{ا ج + ب د} \times \frac{۴ \text{ مس}}{(ا + ب ج) (ا + ج د)} \right\}$$

پر ملتے ہیں۔

(208)

(۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذواربعۃ الاضلاع کے تین دتروں میں سے دو دو کے نقاط تقاطع ع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ع ف گ کے رقبہ کو ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

$$\frac{ا ب ج د}{(ا + ب ج د) (ا + ج د)}$$

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہے

$$ا ب ج د جب \frac{۱}{۱ + ج} = \frac{۱}{۱ + ج} \text{ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ } ا د جب \frac{۱}{۱ + ج} = \frac{۱}{۱ + ج}$$

(۷) اگر چار خطوط مستقیم دیئے جائیں تو ان سے تین جداگانہ ذواربعۃ الاضلاع بنائے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جاسکتا ہے۔ ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں، ان کے وہ چہرہ دتروں جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں، اور اگر ان خطوں کے طول ع، ب، ج، ہوں اور مشترک رقبہ میں اور دائرہ کا نصف قطر س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ع ب ج}{س} = س$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلع ب، د ہیں اور جن کے اس ذواربعۃ الاضلاع کے دتروں کے نقطہ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\frac{۱}{۲} [ا ج - (ا + ب - د)]$$

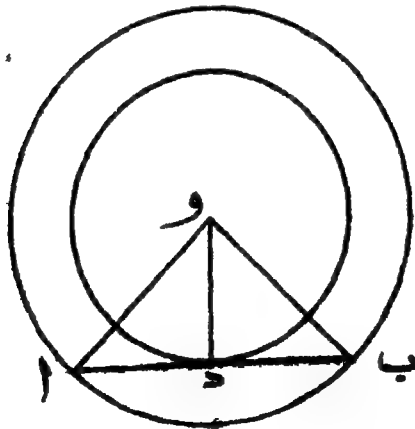


(۹) اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جاسکتے ہیں متشابہ ہیں تو ثابت کرو کہ  $ا^۲ + ج^۲ = ب^۲ + د^۲$   
 (۱۰) ایک ذواربعتہ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جاسکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر، ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر  $\frac{۲}{ا + ب + ج + د}$  ہے۔

(۱۱) اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع کے وتر نقطہ و پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ  
 رقبہ ا ب د  $\times$  رقبہ ا ب ج د = رقبہ ا ب ج  $\times$  رقبہ ا ب د

## منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸ — فرض کرو کہ و اُن دائروں کا مرکز ہے جو ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر مرا ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر د، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول ا ہے۔





اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور  
اُس دائرہ کا مرکز وہو جس کا قطر ق ہے تو

$$\text{ود} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ا})، \text{وع} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ب})، \text{وف} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ج})$$

نیز مثلث د ع ف کے ضلع  $\frac{1}{2}\text{ا}$ ،  $\frac{1}{2}\text{ب}$ ،  $\frac{1}{2}\text{ج}$  ہیں، پس رشتہ

$$\text{د ع ف} + \text{و د} + \text{و ع} + \text{و ف} = \text{د ع ف}$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ حاصل  
ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل  
پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے  
 $\frac{1}{4}(\text{س} - \text{ف})$  جب ا ب ب ب ج ج

جس میں ف سے وہ فاصلہ مراد ہے جو پ اور حائطہ دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔  
و پ کو خارج کرو تا کہ وہ حائطہ دائرہ سے نقطہ پ پر ملے، پ سے مثلث کے  
ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچو تو ان کے پائیں ایک خط مستقیم پر  
واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث کے لحاظ سے د پ کا خط پائیں کہتے ہیں۔ ایک نقطہ  
سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب  
واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ  
مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

$$\text{ابہیں حاصل ہوتا ہے } \frac{\text{پ ل} - \text{ود}}{\text{پ ل} - \text{و د}} = \frac{\text{و پ}}{\text{و پ}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}}$$

(21)

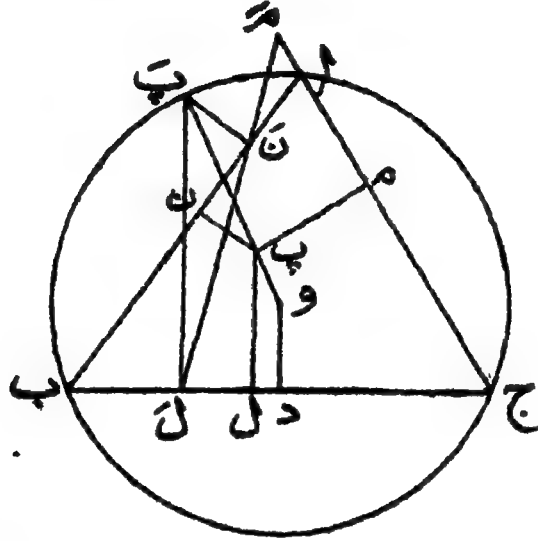
$$\text{اس لیے پ ل} = (\text{س} - \text{ف}) \cdot \frac{\text{و پ}}{\text{و پ}} + \text{و پ}$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے مشابہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$\text{ل م ن} = \text{پ م} \times \text{پ ن} + \text{پ ل} \times \text{پ ن} + \text{پ ل} \times \text{پ م} + \text{پ ل} \times \text{پ م} + \text{پ ل} \times \text{پ ن}$$

$$(r - f) \times \text{ج ب ا} + \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} + \frac{f}{r} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب ا} =$$

$$+ \frac{f}{r} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب ا}$$



نیز  $\frac{1}{r} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب ا} = \text{ج ب ا} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب م} = \frac{1}{r} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب ا} = \frac{1}{r} \times \text{ج ب ل} \times \text{ج ب ا}$

اور  $\text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل} = \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل}$

پس  $\Delta \text{ل م ن} = (r - f) \times \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل} + f \times \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل}$

$\times \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل} = (r - f) \times \text{ج ب ا} \times \text{ج ب م} \times \text{ج ب ل}$

(۳) اگر ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور پ کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہو جس کا مرکز دے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر پ کے تمام مقامات کے لیے

$\Delta \text{ا ب ج} \times \Delta \text{ب ج ا} + \Delta \text{ج ا ب} \times \Delta \text{ا ج ب} + \Delta \text{ب ا ج} \times \Delta \text{ا ب ج} = 0$

مستقل ہے۔

زاویوں ب وج، ج و ا، ا و ب کو 'ب'، 'ج' سے تعبیر کرو تو 'ب' + 'ج' +

$$= \pi ۲، فرض کرو کہ زاویہ پ و ا = ط - اب چونکہ$$

$$ا پ = و پ + و ا - ۲ و ا \times د پ \text{ جم } ط$$

مع پ پ، ج پ کے لیے مشابہ جلوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

$$= و پ \times ۵ ا ب ج + ۳ و ا \times ۵ ب و ج - ۲ و پ \times ۳ و ا \times ۵ ب و ج \text{ جم } ط$$

(211) اس جملہ کی پہلی دو رقمیں، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں ۲ و پ کا

$$\frac{۱}{۲} و ا \times د ب \times د ج \text{ جم } ط \text{ جب } ۵ + \text{جم } (ط + ج) \text{ جب } ۵ + \text{جم } (ب - ط) \text{ جب } ۵$$

$$\frac{۱}{۲} د ا \times د ب \times و ج \text{ جم } ط \text{ جب } ۵ + \text{جم } (ب - ج) \text{ جب } ۵ + \text{جم } (ب - ج) \text{ جب } ۵$$

اور یہ جملہ صفر ہے، اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں :-

(۱) پ ا جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۲ ج مستقل ہے جبکہ پ، حاطہ دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(پ ا جب ۱ + پ ب جب ۲ + پ ج جب ۲ ج مستقل ہے جبکہ پ، اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(ج) پ ا جب ۱ جم (ب - ج) + پ ب جب ۱ جم (ج - ا) + پ ج جب ۱ جم (ا - ب) مستقل ہے جبکہ پ، نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

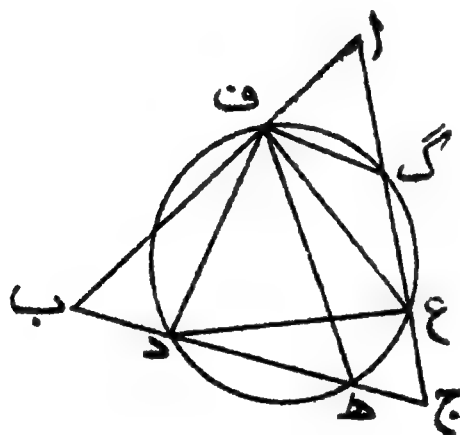
(۴) ثابت کرو کہ اس اقل متساوی الاضلاع شلث کے ضلع کا طول

$$\frac{\sqrt{۳} ۵ ۲}{۵ ۳ ۱ ۴ + ۲ ج + ۱ ب + ۱ و}$$

علم مثلث مستوی ۷۳ مثلثوں اور ذواربعۃ الاضلاعوں کے خواص

ہے جو ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جاسکے اس طور پر کہ اس کے راس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں۔ جملہ بالا میں ۵ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا تساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا محیط دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ہ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ہ ب میں سے ہر ایک ۶۰° ہے، اور اس لیے ف گ، ف ہ ثابت سمتوں میں ہیں، نیز زاویہ ہ ف گ = ۱۲۰ - ج



اگر ا ف کو ا سے تعبیر کریں تو

$$\text{ف گ} = \frac{\text{لا ب ا}}{\text{ج ب}} \times \text{ف ہ} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ب}} \times \text{ف ہ}$$

اس لیے ہ گ = ۶۰° [ لا ب ا + (ج - لا) ج ب ا - (ج - لا) ]

$$\times \text{ج ب ا} \text{ ج ب ج م } (۱۲۰ - ج)$$

اب دائرہ کا نصف قطر ہے  $هگ$  \ ۲ جب (۱۲۰-ج) پس دائرہ اقل ہوگا  
 جبکہ  $هگ$  اقل ہو۔ اب کسی دو درجی جملہ  $له$   $لا$  + ۲  $مه$   $لا$  +  $نه$  کی اقل قیمت  
 نہ  $مه$  ہے (جہاں  $له$  مثبت ہے) کیونکہ  $له$   $لا$  + ۲  $مه$   $لا$  +  $نه$  اس شکل  $له$   $لا$  +  $مه$  +  
 نہ  $مه$  میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے  $هگ$  جب ۹۰ کی اقل قیمت کے لیے حاصل ہوتا ہے  
 [ج' جب' ب' - {ج' جب' ب' + ج' جب' ب' جم (ج-۱۲۰)}]  $\frac{1}{2}$   
 جب' ا' + جب' ب' + ۲ جب' ب' جم (ج-۱۲۰)

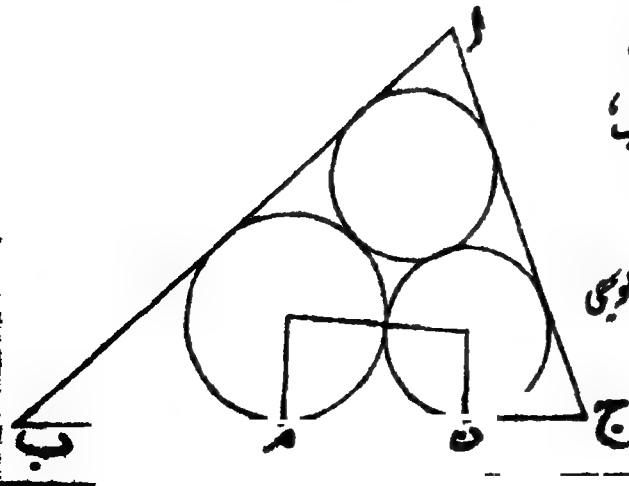
$$= \frac{\text{ج' جب' ا' جب' ب' جب' (ج-۱۲۰)}}{\frac{1}{2} \{ \text{ج' جب' ب' + ۲ جب' ب' جم (ج-۱۲۰)} \}}$$

$$= \frac{[ \text{ج' جب' ا' جب' ب' جب' (ج-۱۲۰)} ]}{\text{ج' جب' ا' + ج' ب' + ۲ ج' + ۲ ج' + ۲ ج' + ۲ ج'}}$$

اب مساوی الاضلاع کا ضلع ہے  $هگ$  جب ۹۰ جب (۱۲۰-ج) پس اس ضلع

$$\text{کی اقل قیمت ہے } \frac{۲۱.۵۲}{[ \text{ج' جب' ا' + ج' ب' + ۲ ج' + ۲ ج' + ۲ ج' + ۲ ج' } ]}$$

(۵) تین دائرے  
 بناؤ جو باہم مس کریں  
 اور ان میں سے ہر ایک  
 ایک دیے ہوئے  
 مثلث کے دو ضلعوں کو بھی  
 مس کرے۔



فرض کرو کہ دائروں کے نصف قطر  $\text{فم}$ ،  $\text{فم}$ ،  $\text{فم}$  ہیں، تب  $\text{مرن} = ۲ \text{ فم}$ ،  $\text{فم}$

اس کے  $\text{ر} = \text{ب م} + \text{ج ن} + \text{مرن} = \text{فم} \frac{1}{2} + \text{ب} + \text{فم} \frac{1}{2} + \text{ج} + ۲ \text{ فم}$ ،  $\text{فم}$   
مع ب اور ج کے لیے متشابہ جلوں کے۔

فرض کرو  $\text{لا} = \text{فم} \frac{1}{2}$ ،  $\text{ا} = \text{فم} \frac{1}{2}$ ،  $\text{ب} = \text{فم} \frac{1}{2}$ ،  $\text{ج} = \text{فم} \frac{1}{2}$

اس  $\frac{1}{2} \text{ب م} \frac{1}{2} \text{ج} = \text{جم}$ ،  $\frac{1}{2} \text{اس} \frac{1}{2} \text{ج} \frac{1}{2} \text{س} = \text{جم}$ ،  $\frac{1}{2} \text{اس} \frac{1}{2} \text{س} \frac{1}{2} \text{ب} = \text{جم}$

اور  $\text{ج ب ا} = \frac{1}{2} \text{س} \frac{1}{2} \text{ب م} \frac{1}{2} \text{ج} = \frac{1}{2} \text{س}$  اور اسی طرح  $\text{ج ب ا} = \frac{1}{2} \text{س}$ ،  $\text{ج ب ا} = \frac{1}{2} \text{س}$   
اس لیے یہیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\frac{\text{ا} + \text{ی} - ۲ \text{ مای جم}}{\text{ج ب ا}} = \frac{\text{ی} + \text{لا} - ۲ \text{ ی لا جم}}{\text{ج ب ا}} = \frac{\text{لا} + \text{ا} - ۲ \text{ لا مای جم}}{\text{ج ب ا}} = \text{س}$$

(218) یہ مساواتیں دفعہ ۶۸ مثال (۱۲) میں زیر بحث آچکی ہیں، اس میں جو پہلا حل حاصل ہوا تھا اس کے لیے

$\text{لا} = \text{اس جم} (\text{ش۔ م})$ ،  $\text{ا} = \text{اس جم} (\text{ش۔ ہ})$ ،  $\text{ی} = \text{اس جم} (\text{ش۔ ج})$

جہاں  $۲ \text{ ش} = \text{م} + \text{ہ} + \text{ج} - \text{اس لیے فم} = \text{س س} \frac{1}{2} \text{ا جم} (\text{ش۔ م})$

$\text{م} = \text{س س} \frac{1}{2} \text{ب جم} (\text{ش۔ ہ})$ ،  $\text{فم} = \text{س س} \frac{1}{2} \text{ج جم} (\text{ش۔ ج})$   
دائرہ کے مطلوبہ نصف قطر ہیں۔ محمولہ بالا مثال کے دوسرے حلوں سے دائروں کے  
تین جٹوں کے نصف قطر ملتے ہیں، یہ دائرے ایسے ہیں کہ ہر جٹ میں سے دو دائرے  
مثلث کے دو محدود ضلعوں کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے ہی جٹ کے نصف قطر ہیں

$\text{س س} \frac{1}{2} \text{ا جم} \text{س س} \frac{1}{2} \text{ب جم} (\text{س۔ ج})$ ،  $\text{س س} \frac{1}{2} \text{ج جم} (\text{س۔ ہ})$

پس دائروں کے کل آٹھ جٹ ہیں جو دیے ہوئے مسئلہ کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔



مندرجہ بالا اعلیٰ شیمز (Lechmütz) کے حل سے لیگیا جو *Nouvelles Annales* کی جلد پنجم میں درج ہے۔ اس مسئلہ کا ہندی حل جو مال فٹی کے مسئلہ کے طور پر مشہور ہے، کیسی (Casey) کی *Sequel to Euclid* میں لیا گیا اور اس پر ایک نیکی مضمون ایم سینس کا لکھا ہوا *Bulletin de L'Academie Royale de Belgique* بابہ رنگہ میں لیا گیا۔

## بارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک متوازی الاضلاع کے ضلع  $\Delta$  ب' زاویہ  $\alpha$  پر ایک دوسرے سے ملے ہوئے ہیں اور اس کے وتروں کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\Delta \sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

۲۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے اس کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس کے فاصلے  $a, b, c$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$r = \frac{1}{2} \left( \frac{a+b+c}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} \right)$$

۳۔ ایک دائرہ کے اندر ایک منظم کثیر الاضلاع اور اس کے گرد آئینہ پری ضلعوں والا دوسرا منظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے ہیں۔ قبل الذکر کثیر الاضلاع کے رقبہ کو ابعد الذکر کے رقبہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ  $3:2$  ہے۔ ضلعوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۔ ایک متوازی الاضلاع کے ہر زاویہ سے ایک ایک خط اس طرح کھینچا گیا ہے کہ یہ خطوط ایک ہی ترتیب میں متصل ضلعوں کے ساتھ ایک ہی جانب مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط ایک دوسرا متوازی الاضلاع بنائیں گے جو ابتدائی متوازی الاضلاع کے مشابہ ہو گا اگر  $\Delta$  ب'  $\alpha = 2$  اور حجم  $\Delta$  جہاں  $\Delta$  ب' ضلع ہیں اور متوازی الاضلاع کا زاویہ  $\alpha$  ہے۔

۵۔ وہ خطوط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں  $A, B, C$  کی نصفیں

کرتے ہیں حائل دائرہ کے محیط سے نقطوں سے جو پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم  $AB$  جو  
ج ب اور ب ا سے تین حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں نسبت ہے

میب<sup>۲</sup>/<sub>۴</sub>: ۱: ۲ جیب<sup>۲</sup>/<sub>۴</sub> حبیب<sup>۲</sup>/<sub>۴</sub> ب جیب<sup>۲</sup>/<sub>۴</sub> ج: جیب<sup>۲</sup>/<sub>۴</sub> ج

۶۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور اس کے ضلعوں پر عمود آ، آ، آ، آ ہوں اور ذوالجبتہ الاضلاعوں اب آج، ب ج آ، آ، ج آ، آ کے اندرونی دائروں کے نصف قطر غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ج + ب + ا}{۱۲} = \frac{خ_۱}{۳-۱} + \frac{خ_۲}{۴-۱} + \frac{خ_۳}{۵-۱}$$

۷۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کے

مرکزوں کو ملائیوا لائحہ ضلع ب ج کے ساتھ زاویہ مم<sup>۱</sup> (جب ب - جبج) بنا لے۔  
 جرم ب + جرم ج - ۱

۸۔ اگر ایک مثلث میں اس کے دو زاویوں سے متقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں کے پائیں ان ضلعوں کے نقاط وسطی سے مساوی الفصل ہوں تو ثابت کرو کہ تیسرا زاویہ ۹۰° ہے یا ۱۲۰°، وگرنہ مثلث مساوی الساقین ہے۔

۹۔ اگر اب ج ایک مثلث ہو جس کا زاویہ ج قائمہ ہے اور اب پر عمود داخل خط مستقیم 'ع' ب د کہینے جائیں جو ب ج 'ا ج' عمودہ کو علی الترتیب 'ع' د پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس ج ع د = مس ا ب ا ج اور

$\Delta \text{عج} = \Delta \text{ج} \mid \Delta \text{ب}$

۱۰۔ اگر ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اس کے فاصلے ایک دوسرے مثلث کے ضلعوں  $AB$  کے

متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ ان فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

۱۱۔ ان چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں؛ اندرونی دائرہ اس طور پر جو مثلث بنائے اس کا رقبہ ان مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو جانبی دائروں سے مذکور الصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دگنا ہے۔

۱۲۔ اگر اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اس کے اندر کوئی نقطہ پ تو ثابت کرو کہ

$$\Delta \text{ ا ب ج } \times \text{م ا پ ج} - \Delta \text{ ب پ د } \times \text{م ب پ د} = \Delta \text{ پ کے محل پر منحصر نہیں ہے۔}$$

۱۳۔ تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر 'ا'، 'ب'، 'ج' ہوں اور ان کے مرکزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب 'د'، 'ه'، 'و' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left( \frac{1}{\text{ا}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ج}} \right) = \frac{1}{\text{د}} + \frac{1}{\text{ه}} + \frac{1}{\text{و}}$$

۱۴۔ ایک مثلث کے ضلعوں 'ا'، 'ب'، 'ج' میں علی الترتیب نقطے 'پ'، 'ق'، 'ر' ایسے کہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{پ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ق}} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

ج ر ا ق ا ق ج پ ج پ ق ج پ کی تنصیف کریں۔

۱۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں 'ا'، 'ب'، 'ج' پر مثلث کے بیرونی جانب

قطاع دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاویے 'د'، 'ه'، 'و' بنائے ہیں

۱۶۔ ان دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاوئے ص، ب، ج ہیں۔

۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زاویوں کے (15) اصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصلا اضلاع قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حاطط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔

۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل ہو اور ل کے مساوی ہو تو

ثابت کرو کہ پ ا + پ ب + پ ج کی اقل قیمت ہے

$$\frac{ل}{جب ا + جب ب + جب ج}$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی علی الترتیب ر، م، ن فاصلوں پر خطوط متقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے گئے ہیں۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ معلوم کرو۔

اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن ان کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے رقبہ سے بقدر

$$\frac{و ر + ب ر + ج ر}{۵۴}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر متساویہ مساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ ان متساوی الساقین مثلثوں کے راسوں کو ملا کر ایک نیا مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے۔ اگر ا ب ج متساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ متساوی الساقین مثلثوں کے

۲۰۔ مثلث پر کے زاویوں میں سے ہر ایک ۲۰ ہے لیکن اگر  $\angle A$  ج، مثلث  $\triangle ABC$  کے متساویہ  
ہو تو ان زاویوں میں سے ہر ایک  $\frac{54}{2} = 27$  ہے جہاں ۵۴ سے مثلث  $\triangle ABC$  کا  
رقبہ مراد ہے۔

۲۱۔ ایک خط مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں  $A$ ،  $B$ ،  $C$  پر قطع کرتا ہے  
اور ان کے مرکز سے فاصلہ ہر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو  
 $\triangle ABC$  پر کے ماسوں سے بنتا ہے۔  $\frac{AB \times BC \times CA}{2}$  ہے۔

۲۲۔ اگر ایک مثلث  $\triangle ABC$  کے نقطہ  $D$  دائرہ کا مرکز ہو اور ضلعوں  
کے نقاط وسطی  $D$ ،  $E$ ،  $F$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$AB \times BC \times CA + BC \times CA \times AB + CA \times AB \times BC = 0$$

۲۳۔ ایک مثلث کے ضلع  $AB$ ،  $BC$ ،  $CA$  کے مساوی ناپا گیا ہے۔  
 $\triangle ABC$  اور  $\triangle DEF$  کی تنصیف نقاط  $E$ ،  $F$  سے کی گئی ہے اور  $E$  اور  $F$  کو ملایا  
گیا ہے۔ ثابت کرو کہ  $EF$  کے حاطہ دائرہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2} AB$  ہے۔  
 $\times$  نم  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۲۴۔ اگر مثلث  $\triangle ABC$  کے ضلعوں پر  $A$ ،  $B$ ،  $C$  کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ  
 $AB \times BC \times CA + BC \times CA \times AB + CA \times AB \times BC = 0$

۲۵۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں  
سے  $AD$ ،  $BE$ ،  $CF$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = (AB^2 + BC^2 + CA^2) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

۲۶۔  $\angle D$ ،  $\angle E$ ،  $\angle F$  وہ نقطے ہیں جہاں مثلث  $\triangle ABC$  کے زاویوں کے

(116)

ناصف مقابل کے ضلعوں سے ملے ہیں؛ اگر لا، ا، ی وہ عمود ہوں جو  
ا، ب، ج سے مثلث د ع ف کے مقابل یکضلعوں پر کھینچے گئے، میں اور  
ع، ع، ع وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث ا ب ج کے مقابل کے ضلعوں  
پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ع^2}{ا^2} + \frac{ع^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{ج^2} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ \text{ جب } ا، ب، ج$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مرکز عمودی کے فاصلے اس کے راسوں  
سے سب ذیل مساوات کی اصلیں ہیں :-

$$لا^2 - ۲(س ا + س ب) + لا^2 + (ر^2 - ۲س ا + س^2) - لا^2 - ۲(س ب + س ا) = ۰$$

۲۷۔ اگر ایک مثلث کا ہر ضلع اس کے گھیرے کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جو  
۵ : ۲ سے کم ہے تو ایک مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے ضلع جانی دائروں  
کے نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے اور ب ج کے  
نقطہ وسطی د سے ایک خط ب ج کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے محیط سے  
ع اور ف پر ملتا ہے۔ ا ع اور ا ف کو ملایا گیا ہے اور اس طرح  
مثلث ا ع ف کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح ا ب، ا ج کی تنصیف  
کر کے باقی اور دو مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے رقبے  
نسبت جب (ب-ج) : جب (ج-ا) : جب (ا-ب) میں ہیں۔

۲۹۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو  
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کے نصف قطر جو ان  
تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جاسکتے ہیں یہ ہیں

ا ب ج

$$(ب ج + ج ا + ا ب) \pm ۲ ا ب ج (ا + ب + ج)$$

۳۰۔ اب ج ایک مثلث ہے؛ اس کے بیرونی جانب اس کے ضلعوں پر مساوی الاضلاع مثلث اب ج، ب ج ا، ج اب بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ اب } + \text{ ب ج } + \text{ ج اب } = \text{ ایک نقطہ و پر ملتے ہیں؛}$$

$$(۲) \text{ و } = \text{ و با } + \text{ و ج؛}$$

$$(۳) \text{ اب } + \text{ ب ج } = \frac{۵}{۴} \text{ اب ج } + \frac{۳}{۴} (\text{ب ج } + \text{ ج اب } + \text{ اب})$$

۳۱۔ ایک مثلث کے ضلعوں و، ب کے وسطی نقطے ا، ب، میں؛  
ا، ب سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیس د، ع ہیں؛ اور  
ا د، ب ع کی تنصیف نقطوں پ، ق سے ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

ب ق =  $\frac{۱}{۲} \text{ او } + \frac{۱}{۲} \text{ او } + \frac{۱}{۲} \text{ او } - \frac{۱}{۲} \text{ اب } - \frac{۱}{۲} \text{ ب ج}$   
۳۲۔ ایک حادہ الزاویہ مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے  
عمود نقطہ پ پر ملتے ہیں اور ایک نیا مثلث ضلعوں پ ا، پ ب، پ ج  
کے ساتھ بنایا گیا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو اور اگر یہ ممکن ہے اور  
اس نئے مثلث کے زاویے ع، ب، ج میں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ب}} + \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ا}} + \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ب}} = \frac{۱}{۲} \text{ قط ا قط ب قط ج}$$

۳۳۔ نصف قطر کے ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز ج ہے دو نقطے  
ا، ب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کے قطر جو ا، ب میں سے  
گذریں اور دیے ہوئے دائرہ کو مس کریں مساوات ذیل کی عملیں ہیں:-

$$\text{لا (ر ج)} - \text{ا ب} + \text{ج ب} + \text{ج ا} - \text{ا ر} - \text{ب ر} = \text{ج ب} + \text{ج ا} + \text{ا ب} = ۰$$

جہاں چھوٹے و بڑے حروف مثلث اب ج کے اجزاء کو تعبیر کرتے ہیں۔  
۳۴۔ اگر ایک مثلث کو کاغذ پر سے کاٹ کر علیحدہ کر لیا جائے اور اس کو  
موڑ کر دہرا کیا جائے اس طرح کہ سلوٹ حائلہ دائرہ کے مرکز اور ایک راس ا





دائرہ کے مرکزیت لا، ما، ی ہوں اور حائل دائرہ کا قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$لا، ما، ی + ق = (لا + ما + ی) = ۴ ق$$

۴۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملائیو اے  
خطوط مستقیم اس دائرہ کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث  
ا، ب، ج کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4} (جم + ا + ب + ج) = \frac{1}{4} (جم + ب + ج + ا)$$

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لا کے بڑھایا جائے تو  
ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً ۴ (جم + ا + ب + ج) کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا، ب، ج ہیں اور ا، ب، ج سے  
علی الترتیب ب، ج، ا، ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔  
عابعد کرو کہ ا، ب، ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں  
ا، ب، ج، د، ع، ف میں نسبت ۱ : ۲ : ۱ جم، ب، جم، ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے ضلعوں پر عمود  
آد، آع، آف کھینچے جائیں تو آع، آف، آد، آج ع  
میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؛ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب  
غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - ۲ غم) (۱ - ۲ غم) (۱ - ۲ غم) = ۲ - ۲ غم غم غم$$

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو  
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر سا جو  
ان تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

(218)

$$\frac{سا(ب + ج + د) + (۷ + ج + د) + (۴ + ا + ب) + (۱ + ب + ج)}{سا(ب + ج + د) + (۷ + ج + د) + (۴ + ا + ب) + (۱ + ب + ج)} =$$





(19)

۵۳۔ اگر کسی نقطہ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$م ا د ج + م م ب ع + ا م ج ف ب = ۰$$

۵۴۔ اگر ب، ج، ا دیے گئے ہوں اور ان اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے اندرونی دائرے ایک دوسرے کو مس کرینگے اگر

$$ج^۲ (جم ب + جم ب - ۳) + ۲ ب ج (۱ - جم ب) + ب^۲ = ۰$$

۵۵۔ اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نقطہ دائرہ کے تماس کھینچے جائیں اور ان کے طول م، م، م ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_۱^۲}{م_۲ م_۳} + \frac{م_۲^۲}{م_۱ م_۳} + \frac{م_۳^۲}{م_۱ م_۲} = ۱ + ۴ س^۲ \text{ اور } \frac{م_۱^۲}{م_۲ م_۳} + \frac{م_۲^۲}{م_۱ م_۳} + \frac{م_۳^۲}{م_۱ م_۲} = ۱ + ۴ س^۲$$

۵۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نقطہ دائرہ کے مرکز کے فاصلوں

کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

$$س^۲ (۱۱ + ۲ جم ب + جم ج)$$

۵۷۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متساویہ مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، ق، ق، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ مثلثوں کا ایک زاویہ } ۲ م (ق ق ق) = \frac{۱}{۲} \text{ ہے،}$$

$$(ب) ق = ق + ق + ق$$

$$(ج) \text{ دائرہ کا نصف قطر } (ق ق ق ق) = \frac{۱}{۲} \text{ ہے۔}$$

۵۸۔ ایک مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے مقابل کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں زاوے ط، ف، پ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے حائلہ دائرہ کا قطر ہے

مر جب (۱۲ + ف - پ) جم ط + جب (۲ب + پ - ط) جم ف + جب (۲ج + ط - ف) جم پ

جب (۱ + ف - پ) جب (ب + پ - ط) جب (ج + ط - ف)

۵۹۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ و پر زاوے

ع، ب، ج بنتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ع} + \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ب} + \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج} = \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ (ب + ج + ع)} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ (ج + ع + ب)}$$

ب ج جب (ع - ۱)

$$(۲) = [ \text{ب ج جب (ع - ۱)} + \text{ج ا جب (ب - ۱)} + \text{ا ب جب (ج - ۱)} ]$$

۶۰۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع ۱) کے متساوی میں کسی نقطہ کے فاصلہ

مثلث کے راسوں سے ف، فم، فم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}^۲ + \text{ف}^۲ + \text{ف}^۲ = \text{ف}^۲ + \text{ف}^۲ + \text{ف}^۲ = \text{ف}^۲ + \text{ف}^۲ + \text{ف}^۲$$

پس ثابت کرو کہ دو متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے ہر ایک مثلث کے راس ایک ثابت نقطہ سے دئے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں ان فاصلوں پر بنائے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۶۱۔ اگر مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج،

ج پ ا، ا پ ب کے حائلہ دائروں کے مرکز د، د، د، و اور مثلث د، د، د کے حائلہ دائرہ کا نصف قطر ہو تو ثابت کرو کہ

۴۔ جب ط جب ف جب پ = لاجب ط + لاجب ف + ی جب پ  
جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول لا، ی ہیں اور ط، ف، پ، زاوے  
ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

۵) ۶۲۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ل، ب ج ہیں ایک دوسرے کو  
بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ل، ب، ج ان دائروں کے نصف قطر ہیں جو ان  
تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جاسکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ل} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ج}$$

۶۳۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے منصف مقابل کے  
ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع، ف، ب ج کے ساتھ  
زاویہ

$$\frac{مس (ب - ج) جب ا}{(ل + ب) جم ج + (ل + ج) جم ب}$$

بناتا ہے۔  
۶۴۔ اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی  
دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور علیٰ ہذا قیاس  
تو بتاؤ کہ جیسے ن، لا انتہا بڑھتا ہے آ آ، ب ج کو اس نسبت میں تقسیم کرتا  
ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیم قطری ناپوں کے درمیان ہے۔

۶۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف  
لے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوط مستقیم ب ج، ج ا، ا ب کھینچے  
گئے ہیں جو علیٰ الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلان میں اور  
مثلث ا ب ج بناتے ہیں جو ا ب ج کے متشابه ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب ج  
کے حاطہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$(ع ف جم ع + ف د جم ب + د ع جم ج) / ۴ جب ا جب ب جب ج$$

جہاں اکر ب ب ج ج کے میلان علی الترتیب ب ج ج ا ب کے ساتھ

عدہ بہ جہ ہیں۔

۶۶۔ اگر ایک مثلث کے حائل دائرہ پر ایک نقطہ پائے ہو جس کا خط پائیں  
مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودی سے ملائیں  
خط مستقیم خط پائیں کو علی التواء قطع کرے تو ثابت کر دو کہ

$$پ ا + پ ب + پ ج = ۲ ج س (۱-۲) \text{ جم } ۱ \text{ جم } ۲ \text{ جم } ۳$$

۶۷۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج میں د ایک نقطہ ہے اگر مثلثوں  
ا ب د ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو  
ثابت کر دو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب ج کے ساتھ د  
ہے لیکن اگر دائروں کے نصف قطر مساوی ہوں تو

$$ج د : د ب : ب ا :: ۱ : ۱ : ۱$$

۶۸۔ نصف قطر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین تہی نصف قطر  
جن کے طول ۱، ۲، ۳ ہیں دائرہ تک پہنچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا  
درمیانی زاویہ  $\frac{\pi}{2}$  ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$۳ (۱+۲+۳) = ۲ (۱+۲+۳) (۱+۲+۳) (۱+۲+۳) (۱+۲+۳)$$

اور اگر اس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے خا ہو تو ثابت کر دو کہ

$$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) = ۲ (۱+۲+۳) (۱+۲+۳) (۱+۲+۳)$$

۶۹۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج کو مس کرنے والے باہری دائرہ کے نقاط  
د، ع، ف ہیں اور علیٰ ہذا القیاس مثلثوں د ع ف، د ج ف، د ب ع کے  
اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غم، غم، غم ہوں  
تو بتاؤ کہ

$$\frac{1}{\text{م}} : \frac{1}{\text{ع}} : \frac{1}{\text{ع}} = 1 - \text{مس} \frac{1}{\text{م}} : 1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}} : 1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}}$$

۱۔ ایک مثلث ا ب ج میں آ، ب، ج اُن دائروں کے مرکز ہیں جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث آ ب ج کا رقبہ ہے

$$\text{مس} \frac{1}{\text{م}} (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}}) (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}}) (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}})$$

$$\times \left\{ \text{قم} \frac{1}{\text{م}} (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}}) \text{قم} \frac{1}{\text{ب}} (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}}) \text{قم} \frac{1}{\text{ج}} (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{م}}) \right\}$$

۲۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے وہ تین مماس کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں۔ ان مماسوں سے مثلث کے کونوں پر تین مثلث بن جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے اندرونی دائروں کے نصف قطر لاک مساوات

$$\text{س}^2 \text{لا}^2 - \text{ر}^2 \text{لا}^2 = \frac{1}{\text{م}} (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}} + \text{مس} \frac{1}{\text{ج}} - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}} - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}}) (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ب}}) (1 - \text{مس} \frac{1}{\text{ج}}) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۳۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کو ملانے والا خط مستقیم پر مثلث کے راسوں سے عمودوں کے طول، ق، ر ہیں؛ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف جب ا}}{\text{قطب} - \text{قط ج}} = \frac{\text{ق جب ب}}{\text{قط ج} - \text{قط ا}} = \frac{\text{ر جب ج}}{\text{قط ا} - \text{قط ب}}$$

جبکہ ق، ر کی علامتوں سے متعلق ایک قرارداد کر لی جائے۔

۴۔ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور راسوں سے اس کے فاصلے ع، ب، ج ہیں۔ خطوط (ب، ج)، (ج، ع)، (ع، ب) کے اندرونی زاویوں کے نصف مثلث کے متناظر ضلعوں سے



نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر علی الترتیب ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق'، 'س' کے رقبہ کو متساوی الانضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

$$۲: ۴: ۶ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۱)$$

۴۔ مثلث 'ا' ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ سے 'ا' سوں کے فاصلے 'ل'، 'م'، 'ن' ہیں اور حائط دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ 'ف' ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ل: ۲: ۴: ۶ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۲)$$

۵۔ اگر ایک مثلث کا مرکز ہندسی 'ث' ہو تو ثابت کرو کہ

$$م: ۱: ۲: ۳ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۳)$$

$$= م: ۱: ۲: ۳ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۴)$$

$$اور م: ۱: ۲: ۳ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۵)$$

$$جہاں م: ۱: ۲: ۳ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۶)$$

۶۔ اگر مثلث میں 'ک' ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاویے 'گ'، 'ا'، 'ج'، 'ث'، 'ب' متساوی ہیں مع دو اور متشابه رشتوں کے تو ثابت کرو کہ

$$م: ۱: ۲: ۳ :: (ب + ج) : (ج + ح) : (ح + د) \quad (۷)$$

۷۔ ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو

دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے؛ اگر ایک

ضلع پر نقاط تماس کے درمیان فاصلہ 'ع' ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر

متناظر فاصلے 'ب'، 'ج' ہوں تو ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ان دائروں کے

مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے  $\frac{۱}{۲} (ب + ج + ع + ع + ع)$  ہے۔

۸۔ اگر ایک ذوالجنبہ الانضلاع کے 'ا' سوں سے دتروں 'م'، 'م' پر

عموداً، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو ثابت کرو کہ دتروں کے درمیان زاویہ کی جیب

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(د + ب)(ج + ۱)}{د} \right\} =$$

(222)

۷۸۔ اگر ا ب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہو تو کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو زاویوں ا اور ج کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع کو زاویوں ب اور د کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے ا د کے ساتھ ص ب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\text{مسا } \left\{ \frac{\text{ج ب} - \text{ا ب} + \text{ج د} + \text{ج ب} (ا + ب)}{\text{ا ج} + \text{ا د} + \text{ج د} + \text{ج ب} (ا + ب)} \right\}$$

۷۹۔ ا ب ج د ع ایک مستوی مخمس ہے؛ یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں ع ا ب، ا ب ج، ب ج د، ج د ع، د ع ا کے رقبے علی الترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ 'ا' مساوات ۱۔ (ا + ب + ج + د + ع) + (ا ب + ب ج + ج د + د ع + ع ا) = ۰ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

۸۰۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$\frac{ا ب ج د}{(ج + ۱)(د + ۱)}$$

۸۱۔ n ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہے، ان ضلعوں میں سے n اضلاع کے مساوی ہیں اور n اضلاع کے مساوی۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{2} (ا + ۲ ب + ۳ ج + ۴ د + \dots + n ق) \cdot \frac{1}{n}$$

۸۲۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع  $a, b, c$ ، وہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے، اس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر جو ان ناصفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور اس ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{4} \frac{a^2(b+c+d)(a+b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

جہاں  $a^2 = a + b + c + d$

۸۳۔ ذواربعۃ الاضلاع  $abcd$  ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر  $ef$  ہے جو  $a$  کے مقابل ہے۔ اگر  $a$  سے  $b, c, d$  پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود ان دائروں سے جو  $a, b, c, d$  پر ان کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں نقطوں  $p, q$  پر ملیں تو

ثابت کرو کہ  $bp \cdot q = ef$  (جب  $a = 1$  - جب  $a = d$ )

۸۴۔ ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے۔ مثلث  $abc$  کے لیے ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ اور اس جانبی دائرہ کی طاقت جو  $a$  کے مقابل ہے  $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$  ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو مثلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے۔

۸۵۔ ایک غمخس کے ضلع  $a, b, c$  جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے،

ترتیب داد  $a, b, c, d$  ہیں۔ ثابت کرو کہ غمخس کا رقبہ مساوات

$$L^2 = \frac{1}{4} \{ a^2(b+c+d) - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \}$$

$$+ (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

(228)

کی ایک اصل ہے جہاں  $۲س = ا + ب + ج + د + ع$   
 ۸۶ - ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ہے ایک منظم کثیر الاضلاع  
 کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے  
 چار متصلہ راسوں سے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کے درمیان  
 رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د)(ج + د - ا)(د + ا - ب - ج)}{(ا + ب + ج + د)(ا + ج - ب - د)(ب + د - ا - ج)(ج + د - ا - ب)} = ۲$$

۸۷ - ایک محدب مخمس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے،  
 اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲س اور ۱ ہیں، اور 'ع' اور 'ب' پر گئے  
 زاویوں کا مجموعہ ہے، 'ا' اور 'ج' پر گئے زاویوں کا مجموعہ ہے، اور دوسری علی ہذا  
 ثابت کرو کہ

$$س^۲ = (جب ۲ع + ... + جب ۲د + ۲س)(جب ۲ع + ... + جب ۲د) = ۰$$

۸۸ - 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک محدب ذواربعتہ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک  
 دائرے کو مس کرتے ہیں اور 'ا' اس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔  
 مخمس کے حائط دائرہ کے تماس نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر کھینچے گئے ہیں جن سے  
 ایک دوسرا محدب ذواربعتہ الاضلاع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس آخری  
 ذواربعتہ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{(س - ۲ - ا + ب - ج - د)(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د - ا)(ج + د - ا - ب)}{(ا + ب + ج + د)(ا + ج - ب - د)(ب + د - ا - ج)(ج + د - ا - ب)} = ۲$$

جہاں دائرہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا نصف قطر ہے اور  $۲س = ا + ب + ج + د + ع$

$$۲س = ب + ج + د + ا + ب + ا + ب + ج$$

# تیرہواں باب

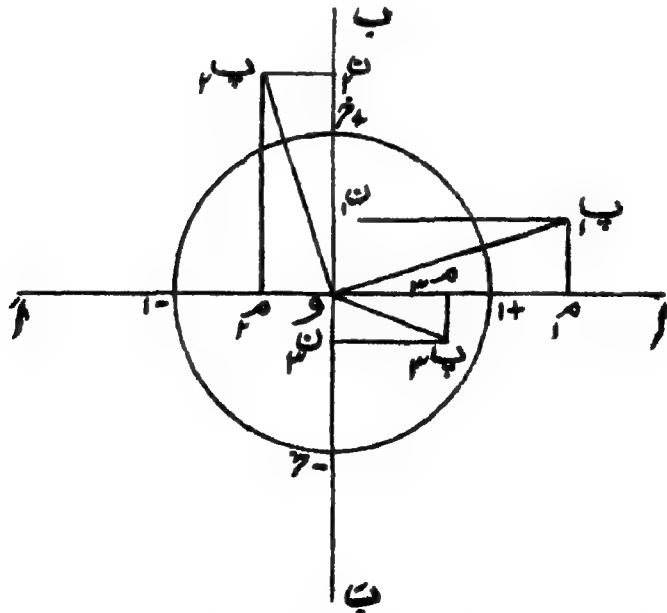
## ملطف اعداد

۱۷۰۔ — جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ کے عددوں پر جنہیں ملطف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے۔ ہم اس باب میں اُس طریقہ پر غور کریں گے جس میں ایسے ملطف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جاسکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ اس سلسلہ میں دائری تفاعل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں اور فی الواقع ایسے تفاعلوں کا ادخال ضروری ہے تاکہ ملطف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں۔

## ملطف عدد کی ہندسی تعبیر

۱۷۱۔ — ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک ثابت لا متناہی خط مستقیم اوپر پیانہ کے مطابق طول و  $1 = 1$  کسی معروف نقطہ سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا توہ کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خط مستقیم و مہرے۔ اب خالص خیالی عدد  $\chi$  کو تعبیر کرنے کے لیے کسی ثابت ستوری میں جس میں  $\alpha$  واقع ہے ایک ثابت خط مستقیم  $\alpha\alpha$  اور  $\beta$  اور  $\beta$  پر عمود ہو، پھر  $\beta$  و  $\beta$  پر سے طول  $\alpha\alpha$  یا  $\beta$  و  $\beta$  کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ثابت ہو یا منفی؟ تب ہم یہ خیال کریں گے کہ خیالی عدد  $\chi$  ما نقطہ  $\alpha$  سے تعبیر ہوتا ہے یا نیز خط مستقیم  $\alpha\alpha$  سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوط مستقیم  $\alpha\alpha$  اور  $\beta\beta$  کو ان نقطوں پر قطع کریں گا جو عددوں  $\pm 1$ ،  $\pm \chi$  کو تعبیر کرتے ہیں۔ ملطف عدد  $\alpha + \chi$  کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل و مہر  $\alpha\beta$  کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کریں گے کہ نقطہ  $\beta$  یا نیز خط مستقیم  $\alpha\beta$  ملطف عدد  $\alpha + \chi$  کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ دو عددوں  $\alpha$  اور  $\chi$  کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوط مستقیم و مہر  $\alpha\alpha$  ہیں جو علی الترتیب  $\alpha$  اور  $\chi$  کو تعبیر کرتے ہیں۔



نمک میں پ، ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا اور  
ما دونوں مثبت ہیں؛ پ، ملتف عدد لا + خ ما کو جس میں لا منفی  
ہے اور ما مثبت؛ پ، عدد لا + خ ما کو جس میں لا مثبت ہے اور  
ما منفی۔ ا و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور ب و ب کو خیالی محور۔

۱۷۲۔ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے  
اور ط وہ زاویہ ہے جو و ب، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو  
و ا سے مخالف سمت ساعت ناپا جاتا ہے۔ تب

$$لا = رجم ط، ما = رجب ط، ی = لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)$$

$$جہاں \quad ر = \sqrt{لا^2 + ما^2} \quad ط = مس \frac{ا}{لا}$$

عدد  $ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$  کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملتف عدد لا + خ ما کا  
مقیاس کہتے ہیں اور زاویہ ط کو اس ملتف عدد کی دلیل یا وجہ۔  
پس خط مستقیم و پ جو اس مستوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا  
ہو مطلق طول کی اور سمت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک  
ملتف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے۔ عدد لا + خ ما کو  
اس مستوی کے کسی اور خط مستقیم سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے جو  
و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ  
ایسا خط مستقیم لا + خ ما کے مقیاس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا  
ہے۔

(226)

۱۷۳۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ، آ سے ابتدا کر کے  
اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ مرتسم  
کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ہے؛ تب اس ملتف عدد  
کا مقیاس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا  
ہے لیکن دلیل جبری طور پر - π سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد  
مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ  
سے گزرتا ہے ملف عدد لا + خ ما کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس  
کی دلیل میں  $\pi^2$  کے ضعف کے اضافہ سے یہ ملف عدد نہیں بدلتا۔  
ہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)  
جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا  
جا سکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دوری (Periodic) ہے۔  
کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اس قیمت کو جو  $\pi$  اور  $\pi$   
کے درمیان واقع ہوتی ہے دلیل کی صدر قیمت کہہ سکتے  
ہیں، اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کریں گے تو اس سے  
مراد یہی صدر قیمت ہوتی۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا من  $\frac{1}{\pi}$  کی صدر  
قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸)، کیونکہ لا + خ ما کی ایک  
دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم  
ہوتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت -  $\pi$  اور  $\pi$  کے  
درمیان ہوتی ہے۔

اس مفہوم میں ایک مثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک مثبت  
خیالی عدد کی دلیل  $\frac{1}{\pi}$  ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل -  $\frac{1}{\pi}$ ، لیکن  
منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالا بہم ہے کیونکہ یہ  $\pi$  ہے  
یا -  $\pi$ ، لیکن ہم اس کو  $\pi$  ہی خیال کریں گے۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا - خ ما  
کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن ان کی دلیلیں ط اور - ط ہیں۔

لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر من (لا + خ ما) سے یا لا + خ ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔  
۴۷۱ — اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ  
حقیقی متغیر لا جبکہ لا سے لاپ تک مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے



(227)

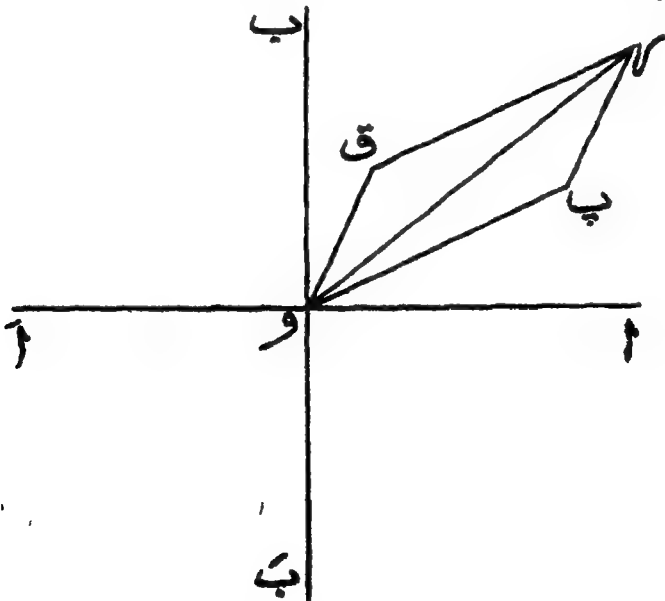
ایک جٹ میں سے گذر سکتا ہے، لیکن ملطف متغیر لا + خ ما کی کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کر کے بھی کہ لا اور ما دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لا انتہا طریقے ہیں جن میں ملطف متغیر لا + خ ما قیمت لا + خ ما سے لا + خ ما تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا سے لا تک لا کا مسلسل اضافہ ہا سے ما تک ما کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملطف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ اور پ لا انتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جاسکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ، پ اور پ کو ملا نیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا سے لا تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں مقید ہو جاتی ہے؛ اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔

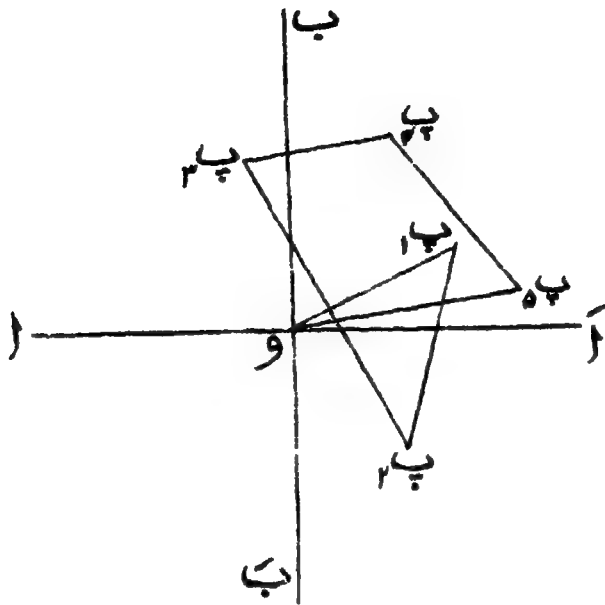
ہم اس منکثہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً ایک بعدی ہے، لیکن ایک ملطف عدد دو بعدی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو بعدی فضاء چاہیے۔ ملطف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۷۰ء میں کہوں (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کو شنی، گاس، رین اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تغاعلوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

## ملطف عددوں کی جمع

۵۷۱۔ فرض کر دو کہ دو ملطف عددوں لا + خ ما، لا + خ ما کو

نقطے پ، ق، تبغیر کرتے ہیں؛ متوازی الاضلاع و پ س ر ق کی تکمیل کرو؛ تب و س کا ٹیل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ، پ س یا و پ، وق کے ٹیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے؛ اس لیے نقطہ سر، دو دئے ہوئے ملٹف عددوں کے مجموعہ (لا + لا) + خ (لا + لا) کو تبغیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملٹف عددوں کا حاصل جمع ہندیسی طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ان ملٹف عددوں کو تبغیر کرنیوالے خطوط مستقیم کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوط مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملٹف عدد کو تبغیر کرتے ہیں، مثلاً پ س جو پ سے وق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملٹف عدد لا + خ ما کو تبغیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کیوں بیان کر سکتے ہیں :- دسے خط مستقیم و پ کھینچو جو لا + خ ما کو تبغیر کرے اور پھر پ سے پ س کھینچو جو لا + خ ما کو تبغیر کرے؛ و س کو ملاؤ؛ تب و س، یا نقطہ س، حاصل جمع (لا + لا) + خ (لا + لا) کو تبغیر کرینگا۔





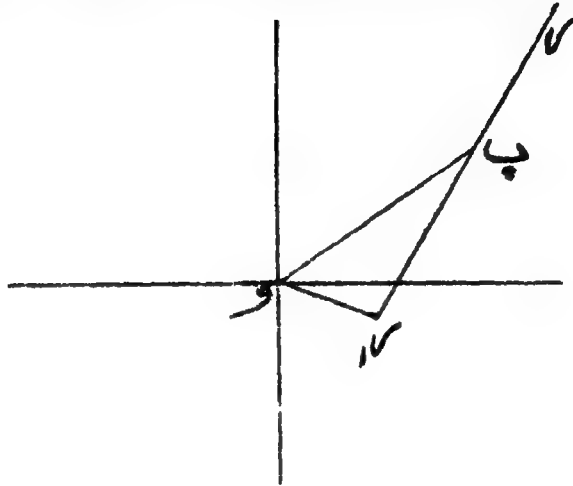
(228)

۱۷۶ — جمع کا جو طریقہ اوپر بیان کیا گیا ہے اس کی توسیع اعداد کے کسی جٹ کے لیے ہو سکتی ہے۔  
 دفعہ ماقبل کی دوسری شکل میں و پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، پھر پ سے پ پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، پھر پ سے پ پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے، و قس علی ہذا۔ اس کے بعد و پ کو طواؤ تب ان عددوں لا + خ پ، لا + خ پ، ...، لا + خ مان کا حاصل جمع خط مستقیم و چین یا نقطہ چین سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ طول و پ، طول و پ، پ پ، ...، پ پ۔

کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے نتیجہ نکلتا ہے کہ ملف عددوں کے ایک جٹ کے حاصل جمع کا مقياس مان کے مقياسوں کے مجموعہ کے مساوی یا اس سے کم ہوتا ہے۔  
 ۱۷۷ — لا + خ ما کو لا + خ ما سے تفریق کرنے کے لئے پ سے ایک خط پ کا کھینچنا چاہیے جو۔ (لا + خ ما) کو تعبیر کرے، یہ خط پ سے مساوی مگر مخالف

سمت میں ہوگا تب مطلوبہ حاصل تفریق یا فرق خط و سہ سے یا نقطہ سہ سے تعبیر ہوگا۔



## ملف عددوں کی ضرب

۸، ۱ — دو عددوں لا + خ با، لا + خ با کا حاصل ضرب ہے

$$(لا - لا با) + (لا با + لا با)$$

اور اگر ہم لا + خ با، لا + خ با کی بجائے

$$لا (جم ط) + خ جب ط، لا (جم ط) + خ جب ط$$

رکھیں تو ان کا حاصل ضرب لکھا جاسکتا ہے

$$لا لا (جم ط) + خ جب ط (جم ط) + خ جب ط (جم ط)$$

اس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا

مقیاس ان عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی

ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی

ہوتی ہے۔

تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر لا + خ با، لا + خ با کی دلیلوں کی صدر  
قیمتیں ط، ط ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت  
ط + ط ہو۔

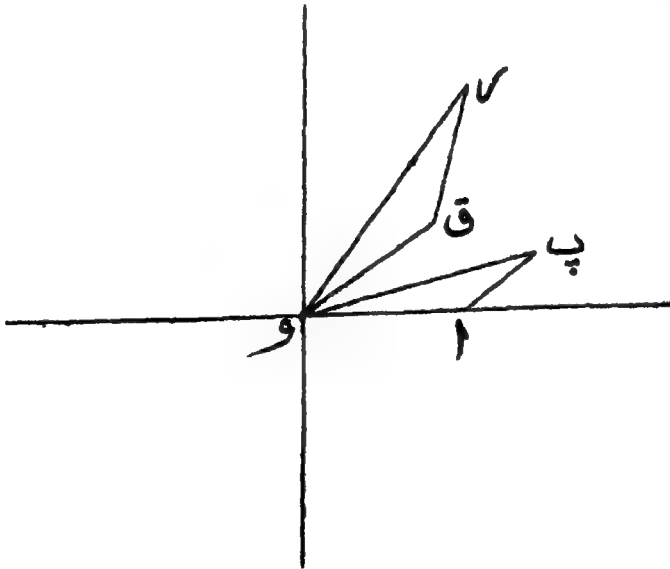
اب ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل  
کر سکتے ہیں: فرض کرو کہ ا، پ، ق، تین عددوں + ا، لا + خ با،  
لا + خ با کو تعبیر کرتے ہیں: ا، پ کو ملاؤ، وق پر ایک مثلث  
ق و س اس طرح بناؤ کہ وہ ا و پ کے مشابہ ہو

اور زاویہ ق و س = ط + ط،

تب زاویہ س و ا = ط + ط

اور نیز و س: وق = و پ: و ا

پس و س کا طول طولوں و پ اور وق کے حاصل ضرب کے مساوی  
ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ س، حاصل ضرب (لا + خ با) ×  
(لا + خ با) کو تعبیر کرتا ہے۔



اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی لا + خ ما = ی (حم ط + خ جب ط) شامل کریں تو

$$(لا + خ ما) (لا + خ ما) (لا + خ ما)$$

$$= ی ی ی (حم ط + ط) + خ جب (ط + ط) \{حم ط + خ جب ط\}$$

$$= ی ی ی (حم ط + ط + ط) + خ جب (ط + ط + ط) \{حم ط + ط + ط\}$$

اسی طرح چار یا زیادہ ملف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231)

ن ملف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$(لا + خ ما) (لا + خ ما) \dots (لا + خ ما)$$

$$= ی ی ی \dots ی (حم ط + ط + \dots + ط) + خ جب (ط + \dots + ط) \{حم ط + \dots + ط\}$$

یا ملف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کا

مقیاس ان کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے

اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل ان کی دلیلوں کے

مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ ملف عددوں کے کسی جٹ

کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورہ بالا دو عددوں

کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جاسکتی ہے۔

ایک ملف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

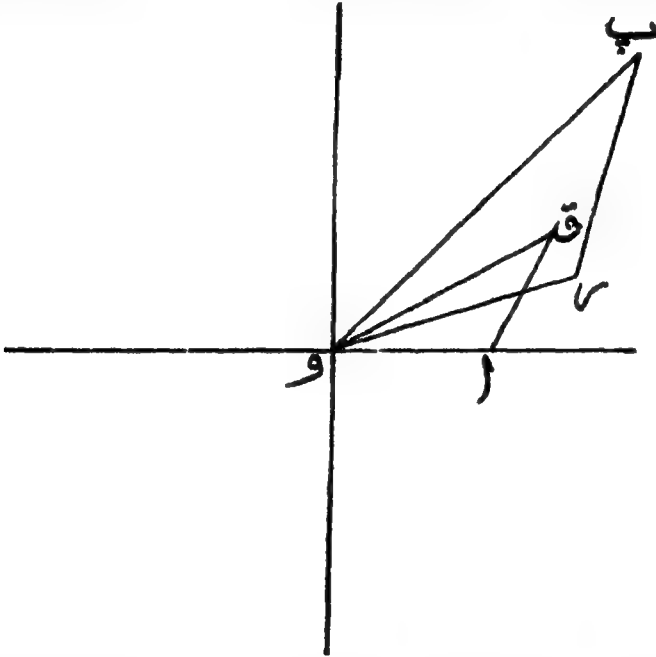
$$۱۷۹ — خارج قسمت (لا + خ ما) \div (لا + خ ما)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\{ (لا لا + لا لا) - خ (لا لا - لا لا) \}}{p}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\{ (حم - طم) + (جب - طم) \}}{p}$$

یا پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس ان کے مقیاسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق (لا + خ لا)



(282) کو نقطہ (لا + خ لا) سے ملاؤ، اور مثلث و ر پ کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث و ا ق کے متشابہ ہو اور زاویہ و ر پ کا ناپ - طم ہو۔ تب زاویہ و ر و = طم - طم اور و ر =  $\frac{وپ}{وق}$  اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

## ملف عددوں کی قوتیں

۱۸۰۔ \_\_\_\_\_ اگر مساوات (۱) میں دائیں جانب کے سب اجزائے ضربی کو لا + خ ما کے مساوی رکھیں تو ضابطہ ملتا ہے

$$(لا + خ ما)^ک = ر^ن (جم ن ط + خ جب ن ط)$$

پس کسی ملف عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس اس دیے ہوئے عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت کے برابر ہے اور اس کی دلیل دیے ہوئے عدد کی دلیل کی ن گنا ہے۔ عدد ن سے یہاں کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے۔

ملف عدد کی کسی مثبت قوت کی قیمت ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ پ (لا + خ ما) کو ۱ (۱ +) سے ملایا گیا ہے؟  
و پ پر مثلث و پ پ بناؤ جو و ا پ کے مشابہ ہو، و پ پ پر مثلث و پ پ بناؤ جو اسی مثلث کے مشابہ ہو، اور علیٰ ہذا القیاس۔  
ت ب و پ، و پ، و پ، و پ...، و پ کے طول علی الترتیب ر، ر، ر، ر، ر...، ر ن ہیں اور زاویے پ و ا، پ و ا، پ و ا...، پ و ا علی الترتیب ط، ط، ط، ط...، ط ن ہیں پس نقطے پ، پ، پ، پ...، پ علی الترتیب عددوں (لا + خ ما)، (لا + خ ما)، (لا + خ ما)...، (لا + خ ما) کو تعبیر کرتے ہیں۔

مخصوص صورت ر = ۱ میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(جم ط + خ جب ط)^ک = جم ن ط + خ جب ن ط$$

اور اگر ق سے جم ط + خ جب ط تعبیر ہو تو نقطے ق، ق، ق، ق...، ق جو جم ط + خ جب ط کی مختلف قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی نصف قطر کے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور اس طرح کہ کسی دو متصل نقطوں کے



کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز  $\frac{1}{2}$  پر زاویہ ط بنتا ہے۔  
 ۱۸۱۔ قوت نوافل کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت  
 صحیح عدد ہو تو جملہ  $(لا + خ)$  سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن میں  
 قوت لا + خ ما ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقياس کی ن میں قوت  
 اُس عدد کی ن میں قوت کا مقياس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقياس  
 حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے  $(لا + خ)$  کا مقياس  $\frac{1}{n}$  ہے  
 جہاں  $\frac{1}{n}$  مقياس کا حقیقی مثبت ن واں جذہ ہے۔ فرض کرو کہ  
 $(لا + خ)$  کی ایک قیمت  $\frac{1}{n}$  (جم ن + خ جب ن) ہے تو

$$ر (جم ن + خ جب ن) = ر (جم ط + خ جب ط)$$

$$جم ن ن + خ جب ن ن = جم ط ط + خ جب ط ط$$

$$اس لیے جم ن ن = جم ط ط، جب ن ن = جب ط ط$$

$$ن ن = ط ط + ۲ س ۲$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(لا + خ)$$

$$کی ایک قیمت ہے  $\frac{1}{n} \{جم ط ط + ۲ س ۲ + خ جب ط ط + ۲ س ۲ + ط ط\}$$$

کیونکہ اس جملہ کی ن میں قوت لا + خ کے مساوی ہے۔ اور کے استدلال  
 سے یہ ظاہر ہے کہ  $(لا + خ)$  کی ہر قیمت مندرجہ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔  
 اگر س کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ن-۱ دی جائیں تو ان قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$جم ط ط + ۲ س ۲ + خ جب ط ط + ۲ س ۲ + ط ط$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں س، س کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{جم} \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن} = \text{جم} \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن}$$

$$\text{اور جب} \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن} = \text{جب} \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن}$$

$$\text{یعنی} \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن} = \pi_2 \text{ک} = \frac{\pi_2 \text{س} + \pi_1 \text{ط}}{ن}$$

$$\text{یا} \quad \text{س} - \text{س} = \text{ن ک}$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر س اور س دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن۔ ا کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے (جم ط + خر جب ط) کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت س ہو تو صفر اور ن۔ ا کے درمیان ایک عدد س کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ س - س، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت س = س کے لیے وہی ہے جو س = س کے لیے ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ (لا + خر) کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\text{نار} (\text{جم} \frac{\pi_2 \text{ط}}{ن} + \text{خر جب} \frac{\pi_2 \text{ط}}{ن}) \text{ نار} (\text{جم} \frac{\pi_2 \text{ط}}{ن} + \text{خر جب} \frac{\pi_2 \text{ط}}{ن})$$

$$، \dots ، \text{نار} (\text{جم} \frac{\pi_2 (1-ن) \text{ط}}{ن} + \text{خر جب} \frac{\pi_2 (1-ن) \text{ط}}{ن})$$

سے ملتی ہیں جو ن اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں  $\pi$  حتمی اور مثبت ہے۔

۱۸۲۔ اگر  $\lambda + \chi$  کی دلیل کی صدر قیمت  $\pi$  ہو۔ یعنی دلیل کی وہ قیمت جو  $\pi$  اور  $\pi$  کے درمیان واقع ہے تو ہم  $(\lambda + \chi)$  کی صدر قیمت کو جملہ

(234)

$$\pi \text{ (جم } \pi + \chi \text{ جب } \pi)$$

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جملوں جم  $\pi + \chi$  جب  $\pi$ ، جم  $(\pi + \chi)$  +  $\chi$  جب  $(\pi + \chi)$  کے  $\pi$  ویں جذروں کی صدر قیمتیں جم  $\pi + \chi$  جب  $\pi$ ، جم  $\pi + \chi$  جب  $\pi + \chi$ ، ... تصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے  $(\lambda + \chi)$  کی مختلف قیمتیں  $\pi$  اور  $\pi$  کے تناظر جملوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل  $\pi$  کی  $\pi$  مختلف قیمتیں لیجائیں۔  $(\lambda + \chi)$  کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں  $\pi$  کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر  $\lambda$  ایک مثبت حتمی مقدار ہے تو  $\lambda$  کی دو قیمتیں  $\pi$  (جم  $\pi + \chi$  جب) اور  $\pi$  (جم  $\pi + \chi$  جب) ہیں یعنی  $\pi$  اور  $\pi$  جہاں  $\lambda$  کا مثبت جذر  $\lambda$  ہے۔  
(۱)  $\lambda$  کی قیمتیں جس میں  $\pi = \pi$ ، یہ ہیں  $\pi$  (جم  $\pi + \chi$  جب  $\frac{1}{\pi}$ )

$\pi$  (جم  $\pi + \chi$  جب  $\frac{1}{\pi}$ )

یا  $\chi$  اور  $\chi$  کی صدر قیمت  $\pi$  ہے اور (۱)  $\lambda$  کی صدر قیمت  $\chi$  اور

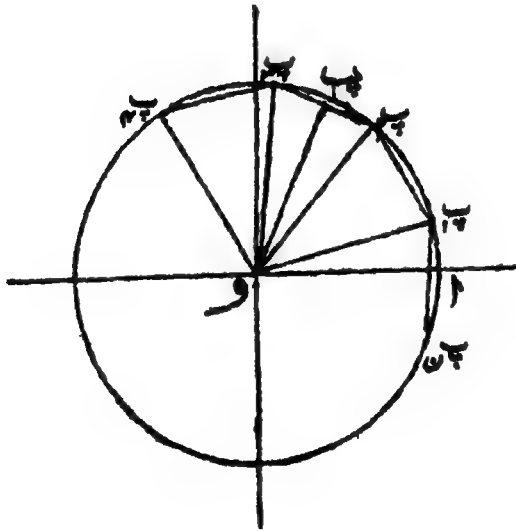
۱۸۳۔ دفعہ ۱۸۱ کے جملوں میں  $\lambda = \pi$  رکھنے سے



(285)

۱۸۴ — اب ہم یہ دکھائینگے کہ ایک ملطف مد کے  $n$  ویں جذروں کو ہندسی طور پر کسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے؛ اس ہندسی طریقہ سے  $n$  ویں جذر کی  $n$  مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمدیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ  $(\text{جم } ط + \text{خر جب } ط)$  کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ  $P$ ،  $A$  سے جس پر  $ط = 0$ ، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ مرتسم کرتا ہے، تب  $P$  کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ  $P$  و  $A$  جو  $P$  سے مرتسم ہوا ہے  $ط$  ہے نقطہ  $P$ ، جملہ  $\text{جم } ط + \text{خر جب } ط$  کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ  $P$ ،  $A$  سے اسی آن چلتا ہے جس آن  $P$  نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاویہ رفتار ہمیشہ  $P$  کی رفتار کا  $\frac{1}{n}$  رہتی ہے اور اس لیے زاویہ  $P$  و  $A$  ہمیشہ  $\frac{ط}{n}$  کے مساوی رہتا ہے۔ تب  $P$ ،  $\text{جم } ط + \text{خر جب } ط$  کو تعبیر کرتا ہے۔ جب  $P$  اولاً کسی محل  $P$  پہنچتا ہے تو





معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو  $n$  مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں  $n$  ضلعوں والا ایک منظم اکثر الاضلاع کھینچنے کا سوال اس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات  $1 = 0$  کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے :-

(۱) جبکہ  $n = 2$  کی کوئی قوت ہو مثلاً جبکہ  $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 32 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 4$

(۲) جبکہ  $n$  شکل  $2^2 + 1$  کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ  $n = 3^2 + 1 = 10$

اس کو گاس نے اپنی کتاب "Disquisitiones arith." میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ  $n$  شکل  $2^2 + 1$  کے متعدد مفرد عددوں اور  $2$  کی کسی قوت کا

حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ  $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 32 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 4$

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت  $n = 2^2 + 1$  پر بحث کی ہے جہاں جب  $\frac{n}{2}$  کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

(237)

## ڈیموائر کا مسئلہ

۱۸۶۔ م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے  $\sum m^p$

$+ x$  جب  $m^p$  (جم  $p$  +  $x$  جب  $p$ ) کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے دفعات ۱۸۰

اور ۱۸۱ میں ان دو صورتوں  $m = n$  اور  $m = \frac{1}{n}$  کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں ان صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ م =  $\frac{ف}{ق}$ ، یعنی جبکہ م ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ م ایک مثبت غیر منطقی عدد ہو اور آخر الامر (۳) جبکہ م کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ (جم ط + خ جب ط)  $\frac{ف}{ق}$  = (جم ف ط + خ جب ف ط) اور اس کی ایک قیمت جم  $\frac{ف}{ق}$  + خ جب  $\frac{ف}{ق}$  ہے۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ م ایک مثبت منطقی عدد ہو۔

یہ ذہن نشین رہے کہ (حجم ط + خرج ط) ط کی قیمتیں سب کی سب

جملہ  $\frac{\text{ف}(\pi s^2 + \pi)}{q} + \frac{\text{ف}(\pi s^2 + \pi)}{q} \text{ خجیب}$



خاص قیمت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ مستحق تو اترے گا، رُکے گا، رُکے گا... کی انتہا ہے جہاں ان میں سے ہر عدد حقیقی اور مثبت ہے اور اس کی اپنی خاص قیمت رکھتا ہے۔ یہ معلوم ہے کہ یہ تو اتر مستحق ہے اور اس کی ایک انتہا ہے جو منطق عددوں کے کسی مخصوص تو اتر کے تابع نہیں ہے جو (تو اتر) غیر منطق عدم کی تعریف کے لیے استعمال ہوا ہے۔

اگر ری مختلف عدد در (حجم ط + خ جب ط) کو تعبیر کرے تو ی کی ایک قیمت کی تعریف جبکہ م ایک غیر منطبق عدد ہو اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ تواتر

رکا (حجم ط + خ جب ط) ، رکا (حجم ط + خ جب ط) ، ... ، رکا (حجم ط +

(238) خربطہ اس، ... کی انتہا ہے جس میں اس اپنی خاص قیمت رکھتا ہے اور اس کی تمام قیمتوں کے جواب میں متناظر قیمتیں (حمطہ + خربطہ) اس کو دی گئی ہیں۔ اس تعریف کے جواب میں  $Y$  کی ایک قیمت

تو اگر رکۃ (حجم مٹ + خج مٹ) رکۃ (حجم مٹ + خج مٹ) ...  
 رکس (حجم مٹ + خج مٹ) ... کی انتہا ہے۔ چونکہ رکس رک

اور حجم م ط + خرب م ط ← حجم م ط + خرب م ط (اس امر کی وجہ سے کہ حجم م ط اور خرب م ط، م کے مسلسل تفاعل ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ ی کی ایک قیمت را (حجم م ط + خرب م ط) ہے، اور (حجم ط + خرب ط) کی ایک قیمت حجم م ط + خرب م ط ہے۔

اس کے ثبوت کے لیے دو مصنف کی کتاب *Theory of functions of a real variable* صفحہ ۳۲ دیکھو۔ اس کتاب کے پہلے باب میں غیر ضلعی عددوں کے نظریہ پر مکمل بحث کی گئی ہے۔

پس دیوار کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔

(جم ط + خ جب ط م) کی عام قیمتیں ہیں

جم م (ط + ۲ س ۲) + خ جب م (ط + ۲ س ۲)

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م (س-س) ہے

ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

(جم ط + خ جب ط م) کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ی م کی تعریف جس کی بموجب اس کی قیمتیں جملہ

را {جم م (ط + ۲ س ۲) + خ جب م (ط + ۲ س ۲)}

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں

پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اسی طرح درست ہیں۔

اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد۔ ک ہو تو

$$(جم ط + خ جب ط م) = \frac{1}{(جم ط + خ جب ط م)}$$

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

$$جم م ط + خ جب م ط \quad یا \quad جم م ط - خ جب م ط$$

ہے جو جم م ط + خ جب م ط کے مساوی ہے۔ اس طرح دیوار کا مسئلہ

کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

(جم ط + خ جب ط) (جم ط + خ جب ط) .... (جم ط + خ جب ط)

= جم (ط + ط + ... + ط) + خ جب (ط + ط + ... + ط)

سے جو ڈیموائر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط جم ط ... جم ط (۱ + خ مس ط) (۱ + خ مس ط) ... (۱ + خ مس ط) میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (۱ - م + م - ...)

جب (ط + ط + ... + ط) = جم ط جم ط ... جم ط (م - م + م - ...)

جہاں م سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن ماسوں میں سے س، س، س ماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔ (289)

دفعہ ۱۱ کے مسئلے (۲۹)، (۳۰)، (۴۳) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط

= (جم ط + خ جب ط) سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا یا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط) = جم ن ط + خ جب ن ط

اور اس لیے نیز (جم ط - خ جب ط) = جم ن ط - خ جب ن ط۔ ان سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں۔  $\text{جم ن ط} = \frac{1}{4} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) + \frac{1}{4} (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$ ،

$\text{خر جب ن ط} = \frac{1}{4} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط}) - \frac{1}{4} (\text{جم ط} - \text{خر جب ط})$

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ اوہ میں آچکا ہے کہ

$$1 + \text{لاجم ط} + \text{لاجم ۲ ط} + \dots + \text{لاجم ن ط} + \dots$$

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ  $1 - ۲ \text{لاجم ط} + \text{لاجم ۲ ط} - \dots$  ہے۔  $\text{جم ن ط}$  کو  $\text{ع ن}$  سے

تعبیر کرو تو  $\text{ع ن} = ۲ \text{جم ط} - \text{ع ن} - ۱ + \text{ع ن} - ۲ = ۰$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے کے لیے ان کو

$\text{ع ن} = ۱$  کر کے جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو ک کے لیے ہمیں دو درجی مساوات

ک<sup>۲</sup> - ۲ک جم ط + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں ک = جم ط ± خر جب ط ہیں

پس  $\text{ع ن} = ۱$  (جم ط + خر جب ط) + ب (جم ط - خر جب ط)

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو  $\text{ع ن}$  میں ہے۔  $\text{ن} = ۱$  اور  $\text{ن} = ۲$  رکھنے سے ہم دیکھتے

ہیں کہ  $\text{ا} = \text{ب} = \frac{1}{4}$  اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو  $\text{جم ن ط}$  کے لیے اوپر

دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے۔

## اجزائے ضربی

۱۸۸۔ اب ہم لا۔ (۱ + خ ب) کو لا کے لحاظ سے ن خطی

اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا (۱ + خ ب)

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی قیمتیں ق،  
ق، ق، ق، ...، ق، سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{لا۔} (1 + \text{خ ب}) = (\text{لا۔ ق}) (\text{لا۔ ق}) (\text{لا۔ ق}) \dots (\text{لا۔ ق})$$

کیونکہ جب لا۔ ق = 0۔ تو لا۔ (1 + خ ب) معدوم ہوتا ہے اور اس لیے

لا۔ ق ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیے۔ اس طرح ہمیں ن

مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ان سے زیادہ

اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو 1 = رجم ط' ب = رجب ط' تو لا۔ (1)

+ خ ب کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\left\{ \frac{\pi s^2 + ط}{ن} + \text{رجب} + \frac{\pi s^2 + ط}{ن} \right\}^{1-\frac{ن}{س}} = \frac{\pi s^2}{ن}$$

$$\text{جیسے غہ} = \frac{1}{ن} = \frac{1}{ن} (1 + 2 + 3 + \dots + \frac{1}{ن})$$

اس نتیجے سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں

حاصل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔

(240)

(1) فرض کرو 1 = 1' ب = 0۔ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left( \frac{\pi s^2}{ن} - \frac{\pi s^2}{ن} \right)^{1-\frac{ن}{س}} = \frac{\pi s^2}{ن}$$

$$\pi^2 = \frac{\pi (s - ن)^2}{ن} + \frac{\pi s^2}{ن} \quad \text{اور چونکہ}$$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) = 1-l$$

$$\left( \frac{\pi s^2}{n} - \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( \frac{\pi s^2}{n} + \text{خریب} \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) =$$

$$\left( l^2 - \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( 1 + \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n (1+l)(1-l) = 1-l$$

$$\left( l^2 - \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( 1 + \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

(۲) فرض کرو  $1-l = b$  . تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n (1+l) = 1+l$$

$$\left( l^2 - \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( 1 + \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n (1-l) = 1-l$$

$$\left( l^2 - \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( 1 + \frac{\pi s^2}{n} \right)$$

$$(3) \quad l^2 - \frac{\pi s^2}{n} + 1$$

$$= \left( \frac{\pi s^2}{n} - \text{خریب} \right) \left( \frac{\pi s^2}{n} + \text{خریب} \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{s}{1-n} \quad \prod_{s=1}^n \left( \frac{\pi s^2}{n} - \text{خریب} \right) \left( \frac{\pi s^2}{n} + \text{خریب} \right)$$

$$\left( l^2 - \frac{\pi s^2}{n} \right) \left( 1 + \frac{\pi s^2}{n} \right)$$







# مثالیں

—۱۹۰

(۱)  $\frac{1}{(1+\lambda)^n}$  کو جزوی کسور میں بیان کر دجھاں  $m$  ایک صحیح عدد ہے  $n$  سے چھوٹا۔

اگر مساوات  $\frac{1}{(1+\lambda)^n} = 0$  کی ایک اصل  $e$  ہو تو جزو ضربی  $\lambda - e$  کے

جواب میں جزوی کسر ہے  $\frac{1}{1-\frac{e}{\lambda}} \times \frac{1}{\lambda - e} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda - e} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}$  اور اس لیے  $m$  کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}}$$

اگر  $n$  طاق ہو تو مزید کسر  $\frac{1}{(1+\lambda)^n} \frac{1}{(1-\frac{e}{\lambda})}$  حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر  $n$  طاق ہے تو

(242)

$$\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}$$

اور اگر  $n$  جفت ہے تو

$$\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda(\lambda - e)}$$

(۲)  $\frac{1-n}{1-n}$  کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر م، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n}}{\frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n}} = \frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n}$$

کسر (۱) کا نسب نامہ اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے

اور پھر ہر جزو ضربی کے تناظر کسر شال (۱) کے مطابق معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ

$$\frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n} = \frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n}$$

$$\frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n} = \frac{1-n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{1-n}$$

(۱) کی دائیں جانب کا جملہ، جم ط کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ مساوات (ب) (۱) کی طرفین کو ذ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے، یا دوسرے الفاظ میں ذ کو ذ + ہ میں بدل کر مساوات کی طرفین میں ہ کے سروں کو مساوی رکھیں گے۔

(۵) اگر جم ط + جم ذ + جم پ = ۰، اور جب ط + جب ذ + جب پ = ۰،

جم ط + جم ذ + جم پ = ۰، جم ط + جم ذ + جم پ = ۰،

جب ط + جب ذ + جب پ = ۰، جب ط + جب ذ + جب پ = ۰،

اور

یہ اُس عام طریقہ کی ایک مثال ہے جو جبری مسئلوں میں حرفوں کی بجائے  
 مختلف قیمتیں رکھ کر شلثی مسئلوں کو اخذ کر نیکار ہے۔ اگر  $ا + ب + ج = ۰$  تو  $ا + ب + ج$   
 $۲ا + ب + ج = ۰$ ؛ فرض کرو  $ا = جم ط + خ جب ط + ب = جم ف + خ جب ف$ ،  
 $ج = جم ب + خ جب پ$  تو گویا ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ اگر  
 $(جم ط + جم ف + جم پ) + (خ جب ط + جب ف + جب پ) = ۰$ ،  
 تو  $(جم ۳ ط + جم ۳ ف + جم ۳ پ) + (خ ۳ جب ط + جب ۳ ف + جب ۳ پ)$   
 $۰ = ۳ [جم (ط + ف + پ) + خ جب (ط + ف + پ)]$ ۔  
 اب دونوں مساواتوں میں حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ صفر کے مساوی  
 رکھنے سے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

## تیرہویں باب پر مثالیں

(243)

$$۱۔ ثابت کرو کہ  $\left( \frac{ا + جب ف + خ جم ف}{ا + جب ف - خ جم ف} \right)^n = جم \left( \frac{ا}{۱} - \frac{ن}{۲} (ن ف) + خ جب \left( \frac{ا}{۱} - \frac{ن}{۲} (ن ف) \right) \right)$$$

$$۲۔ \{جم ط - جم ف + خ (جب ط - جب ف)\}^n + \{جم ط - جم ف - خ (جب ط - جب ف)\}^n$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$۳۔ ثابت کرو کہ  $\frac{(ا + ۱)^n - (ا - ۱)^n}{۲}$$$

$$= ۱ (ا + \frac{ا}{۲}) \left( ا + \frac{ا}{۲} \right) \dots \left( ا + \frac{ا}{۲} \right) (ا + \frac{ا}{۲})$$



۸۔ اگر  $e$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$ ،  $e$  کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیوب کا مجموعہ اور نیز ان کی جیوب کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جم } e = \frac{1}{p} \sum (\text{جم } e) - \frac{1}{p} \sum (\text{جب } e)$$

$$\sum \text{جب } e = \sum \text{جب } e = \sum \text{جم } e$$

۹۔ اگر  $n$  مقداروں  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  میں سے ایک ایک، دو، تین،  $\dots$ ،  $n$  کے حاصل ضربوں کے مجموعے  $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$  ہوں تو ثابت کرو کہ

$$1 - m_1 + m_2 - m_3 + \dots = \sum \text{جب } m_1 (1 - m_2) \text{ لاقم } m_3$$

$$m_1 - m_2 + m_3 - \dots = \sum \text{جب } m_1 (1 - m_2) \text{ لاقم } m_3$$

$$10. \text{ اگر } \text{جم } (b - c) + \text{جم } (c - d) + \text{جم } (d - e) = \frac{3}{p} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جم } n = \text{جم } n + \text{جم } n + \text{جم } n$$

صفر کے مساوی ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ  $n$  کا ضعف ہو؛ اور

اگر  $n$  کا ضعف ہے تو وہ  $\frac{1}{p} \sum n (e + b + c)$  کے مساوی ہے۔  
۱۱۔ ثابت کرو کہ لاکھ وہ قیمتیں جو مساوات

$$1 - n - \frac{n(1-n)}{2} + \frac{n(1-n)(2-n)}{3} + \dots$$

$$= \frac{1}{p} n (1+n) +$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ  $\frac{\pi(1+n^2)}{n}$  جس میں  $n$  کوئی صحیح عدد ہے۔

$$\frac{\pi(1+n^2)}{1+n^2(1-1) - 1+n^2(1+1)} = \frac{1-n^2}{1+n^2} \text{ جب } n^2 \text{ زوج ہے}$$

$$\frac{\pi}{1+n^2} = \text{جس میں } n$$

۱۲۔ اگر  $\pi$  سے  $n$  حاصل ضروریوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

مس  $\pi^2$ ،  $\pi^2(1+n^2)$ ، مس  $\pi^2$ ،  $\pi^2(1+n^2)$ ، ...، مس  $\pi^2$ ،  $\pi^2(1+n^2)$  میں سے  $n$  مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار مس  $\pi^2(1+n^2)$  کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$\left( \frac{1-n^2}{1+n^2} \right) \text{ جب } n^2 \text{ زوج ہے} \times \pi^2(1+n^2) \times \text{جم } n^2(1+n^2)$$

ثابت کرو کہ  $\frac{\pi}{1+n^2} = \text{جہاں حاصل جمع کی ایک سے } n \text{ تک تمام قیمتوں کے لئے}$   
 لیا گیا ہے اور  $n$  کی قیمت ایک سے  $n$  تک کوئی بھی ہے۔

۱۳۔  $n$  ضلعوں والا ایک منظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے  $n$  اسوں تک وتر کھینچے گئے ہیں۔ اگر یہ وتر  $1, 2, 3, \dots, n$  سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اس وتر سے کی گئی ہے جو قریب ترین اس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دو سرے ترتیب وار لئے گئے ہیں) تو ثابت کرو کہ مقدار



حائط دائرہ کے مرکز سے  $a, a, a, \dots, a$  پر عمود کھینچے گئے ہیں۔

ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1)am$  ہے۔

۱۹۔ اگر  $a, a, a, \dots, a$ ،  $b, b, b, \dots, b$  دو ہم مرکز اور متشابہ واقع منظم کثیر الاضلاع ہوں جن کے ضلعوں کی تعداد  $n$  ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n}{a_1 a_2 \dots a_n \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n}{a_1 a_2 \dots a_n \times b_1 \times b_2 \times \dots \times b_n}$$

جہاں  $a$  ہم مرکز دائرہ پر  $a$  کوئی نقطہ ہے جس کا نصف قطر کثیر الاضلاع علیہ حائط دائروں کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۰۔ نصف قطر  $a$  کے ایک دائرہ کے اندر مرکز سے فاصلہ  $b$  پر ایک نقطہ  $a$  لیا گیا ہے اور نقطے  $a, b, c, \dots, d$  محیط پر لیے گئے ہیں ایسے کہ  $a, b, c, d, \dots, e$ ،  $b, c, d, \dots, e$ ،  $c, d, \dots, e$ ،  $d, \dots, e$  محاذی مرکز و پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$a + b + c + \dots + e$$

$$= (a + b + c + \dots + e) + (b + c + \dots + e) + \dots + e$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ اگر  $n$  ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-2)}{2} + \dots + \frac{n(n-n)}{2}$$

۲۲۔ ثابت کرو کہ  $n$  ضلعوں والے الگ الگ منظم کثیر الاضلاع پر



نصف قطر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جاسکتے ہیں ان کی تعداد  $m$  صحیح عددوں کی اس تعداد کا نصف ہے جو  $n$  سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دکھاؤ کہ ان کے فیملوں کا حاصل ضرب  $k$  مان  $n-2$  م کے مساوی ہے اگر  $n$  ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور  $k$  کے مساوی ہے اگر  $n$  ایک مفرد عدد کی قوت نہ ہو۔

---

(246)

## پہلو دھواں باب لامتناہی سلسلوں کا نظریہ

۱۹۱ — ہم اس باب میں چند مسئلے بیان کریں گے جو لامتناہی سلسلوں کے استدقاق سے متعلق ہیں جبکہ ان کی ارقام حقیقی یا ملتف اعداد ہوں یا متغیرات۔ ایسے سلسلوں کے نظریہ کی مکمل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے، اس لیے ہم اپنی توجہ صرف ان چیزوں تک محدود رکھیں گے جو مثلثی سلسلوں کی نوعیت اور ان کی خاصیتوں پر بحث کرنے کے لیے بالکل ضروری ہیں۔

### حقیقی سلسلوں کا استدقاق

۱۹۲ — فرض کر دو کہ حقیقی عددوں کا کوئی توازن  $u, v, \dots$  ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے اور فرض کرو

$$u = v + u + \dots + u$$

اگر  $u$  کی ایک معین محدود انتہا میں ہے جبکہ  $n$  کو نامحدود طور پر بڑھایا جاتا ہے تو لامتناہی سلسلے  $u + u + \dots + u + \dots$  کو مستدق کہا جاتا ہے اور  $u$  کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف اس کا مجموعہ کہتے ہیں۔





(۳) یہ ہو سکتا ہے کہ گوئی کی کوئی معین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے مگر ن کی بڑھتی ہوئی قیمتوں کے ایک تو اتر (فرض کرو ن، ن، ن، ن، ن، ....) کا انتخاب کرنا ممکن ہو ایسا کہ س، ایک معین انتہا کی طرف مستقیم ہو بشرطیکہ ن صرف دو قیمتیں اختیار کرے جو اس تو اتر میں ہیں۔

اس صورت میں سلسلہ کو اہترازی سلسلہ کہتے ہیں، لیکن بعض اوقات اہترازی سلسلے متعین کہلاتے ہیں۔ وہ اہترازی سلسلہ جس میں س، ن کی ہر قیمت کے لیے عدداً کسی مستقل مثبت عدد سے کم ہو عدم تعین کے محدود حدود کے درمیان اہترازہ کر نیوالا سلسلہ کہلاتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر کسی سلسلہ کی قیمتیں سب کی سب ایک ہی علامت کی ہوں تو سلسلہ صورت (۱) کے مطابق متعین ہے ورنہ مستقیم۔ (248)

$$\text{سلسلہ} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

$$\text{اور} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

دونوں متعین ہیں کیونکہ ہر صورت میں س، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے اور مستقل علامت رکھتا ہے۔

سلسلہ  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$  عدم تعین کے غیر معین حدود کے درمیان اہترازہ کرتا ہے۔ کیونکہ س،  $-\frac{1}{n}$  جبکہ ن جفت ہو اور س،  $\frac{1}{n}$  جبکہ ن طاق ہو؛ اس طرح جیسے ن بڑھتا ہے س، عددی قیمت میں بڑھتا ہے اور نہ س،  $\infty \pm$

$$\text{سلسلہ} \quad 1 + 2 - 1 + 1 + 2 - 1 + 1 + 2 - \dots$$





کافی بڑی قیمت لینے سے  $1 + 1 + 1 + \dots$  اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں؛  
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کے استدا قاق کی ضروری شرط یہ ہے کہ  
ہم  $1 + 1 + 1 + \dots$  لیکن یہ شرط بطور خود کافی نہیں ہے۔  
مستدق سلسلہ کے استدا قاق کی تیزی  $n$  کی اس کم سے کم  
قیمت سے پانی جاسکتی ہے جو صدہ کی ایک دی ہوئی قیمت کے  
متناظر ایسی ہو کہ سب کے سب جزوی باقی بچاؤ ہم مطلق  
قیمت میں صدہ سے کم ہوں؛ یعنی رقموں کی اس تعداد سے جن کا  
لینا ضروری ہے تاکہ جزوی باقی سب کے سب کسی مقررہ عدد سے  
کم ہوں۔

ہندسی سلسلہ  $1 + 1 + 1 + \dots$  کی صورت میں جو قیمت  $\frac{1}{1-1}$   
کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ لا عدد ایک سے کم ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \dots$$

اور لا کو مثبت فرض کرنے سے یہ صدہ سے کم ہو گا م کی تمام قیمتوں کے لیے اگر  $\frac{1}{1-1}$   
صدہ؟ اس صورت میں  $n$  کی مناسب قیمت وہ صحیح عدد ہے جو  $\frac{1}{1-1}$  کو  $1$  سے کم کر دے۔

سے عین بڑا ہے۔  $n$  کی قیمت بڑھتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے، اور اس لیے  
اس سلسلہ کے استدا قاق کی تیزی گھٹتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے؛ لا جب ایک  
پر پہنچتا ہے تو  $n$  غیر معین طور پر بڑھتا ہے؛ اس طرح سلسلہ کا استدا قاق  
غیر معین طور پر سست ہو جاتا ہے۔ اگر لا  $1$  تو سلسلہ صریحاً متع ہے۔

۱۹۴۴۔ اب ہم مستدق سلسلہ  $1 + 1 + 1 + \dots$  کی  
اس صورت پر غور کریں گے جس میں مثبت رقمیں غیر معین تعداد میں ہیں اور  
تیز رفتاری رقمیں غیر معین تعداد میں فرض کر دیا  $1 + 1 + 1 + \dots$  کی عددی قیمت



تعبیر کی گئی ہے، اس طرح | ۱ | ۱ | کے مساوی ہے یا۔ | ۱ | کے بموجب  
اس کے کہ | ۱ | مثبت ہے یا منفی۔ اب سلسلہ

$$| ۱ | + | ۱ | + | ۱ | + \dots + | ۱ | + \dots$$

پر غور کرو۔

اگر یہ آخری سلسلہ مستحق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً مستحق  
کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ | ۱ | ۱ | ۱ | متبع ہے تو سلسلہ | ۱ | کو  
نیم مستحق یا مشروطاً مستحق یا اتفاقاً مستحق کہتے ہیں۔

(250)

سلسلہ  $۲ - ۲ + ۲ - ۲ + \dots$  مطلقاً مستحق ہے کیونکہ سلسلہ  $۲ + ۲ + ۲ + \dots$   
مستحق ہے؛ لیکن سلسلہ  $۲ - ۲ + ۲ - ۲ + \dots$  صرف مشروطاً مستحق ہے  
کیونکہ سلسلہ  $۲ + ۲ + ۲ + \dots$  متبع ہے۔

سلسلہ  $۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$  جس میں ارقام باری باری سے  
مثبت منفی ہیں ہمیشہ مستحق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقمِ سابقہ  
بڑی ہو اور نیز نہا  $۱ =$  کیونکہ

$$(۱) \text{ ب } ۱ = (۱ + ۱ - ۱) + (۱ + ۱ - ۱) + \dots + (۱ + ۱ - ۱) + \dots$$

$$= ۱ + ۱ - (۱ + ۱) - (۱ + ۱) - \dots$$

اور اس لیے (۱) ب ۱، مثبت ہے اور | ۱ | سے کم ہے یا اس کے  
مساوی۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہو سکتا ہے اتنا بڑا کہ | ب ۱ | خاصہ م  
کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ صد کتنا ہی چھوٹا ہو۔ اس لیے سلسلہ مستحق ہے۔  
۱۹۵ — مشروطاً مستحق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بدلا جائے

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقموں کا مجموعہ  
 س ہے اور پہلی ق منفی رقموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی  
 ہیں س ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اس طور پر  
 کہ مثبت رقموں کا تواتر نہ بدلے اور نیز منفی رقموں کا تواتر نہ بدلے  
 اور سلسلہ کی پہلی ف + ق رقموں میں سے ف رقمیں مثبت ہوں اور  
 ق رقمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ س ہے۔ س  
 کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب  
 چونکہ تواتر س ہے، س میں سے ہر ایک مثبت رقموں پر مشتمل ہے  
 اس لیے س کی اور س کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا  
 ورنہ لا متناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ  
 دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستحق نہیں ہے، اس لیے س، س کی  
 انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لا متناہی ہے، اگر دونوں انتہائیں  
 لا متناہی ہیں تو نہا (س - س) کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں  
 کے دو تواتروں پر منحصر ہوگی۔ اگر س، س کی انتہاؤں میں  
 سے صرف ایک لا متناہی ہے تو نہا (س - س) لا متناہی ہے  
 اور اس لیے اصلی سلسلہ مستحق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی  
 ترتیب ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ... میں علامتیں باری باری سے  
 مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبت تسادی میں غیر معین طور پر  
 بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب ۱ + ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ... میں لکھیں تو ف اور ق نسبت  
 ۱ : ۲ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور س، س کی





اگر س کی ایک متعین انتہا جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے س ہو جو خود ایک ملف یا حقیقی عدد ہے تو لامتناہی سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کو مستدق کہتے ہیں اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف مجموعہ۔

وہ شرط کہ س = نہا س یہ ہے کہ |س-س| صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

$$س - س = غن = (جم طن + خ جب طن)$$

تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے نہا غن = ، اگر س = س + خ س جہاں (252)

س اور س حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے س - س = غن جم طن، س - س = غن جب طن، تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نہا غن = ۰ تو

$$نہا (س - س) = ، نہا (س - س) = ۰، یعنی س = س$$

علی الترتیب س اور س کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم

ہوتا ہے کہ سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ... کے مستدق

ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے لا + لا + لا + لا + لا + ... اور

لا + لا + لا + لا + لا + ... دونوں مستدق ہونے چاہئیں۔ اس کے عکس

اگر یہ آخری دو سلسلے مستدق ہیں تو ملف عددوں کا سلسلہ بھی مستدق ہے، کیونکہ

$| (س + خ س) - (س + خ س) | \geq | س - س | + | س - س |$   
 اب اگر نہا س = س نہا س = س تو ہم ن کی ایک قیمت ن منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ  
 $| س - س | > \frac{1}{p} صہ، | س - س | > \frac{1}{p} صہ بشرطیکہ ن \leq صہ$ ۔ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ  
 $| (س + خ س) - (س + خ س) | \geq صہ$  اگر ن  $\leq صہ$ ؛ اور چونکہ صہ اختیار ہی ہے  
 اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا س = س + خ س؛ اور اس طرح  
 ملتف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$  میں سے کسی کی  
 انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ امتزاج کرے تو سلسلہ  $\mathcal{C}_i$  مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ  $س = ر (جم ط + خ جب ط)$ ۔ اب ہم یہ ثابت کر نیچے کہ  
 سلسلہ  $\mathcal{C}_i$  مستدق ہوگا اگر سلسلہ  $\mathcal{C}_j$  جس میں ہر رقم  $ر$  متناظر قسم  
 ی کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ  $\mathcal{C}_j$   $ر (جم ط + خ جب ط)$   
 مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں  $\mathcal{C}_j$   $ر (جم ط)$ ،  $\mathcal{C}_j$   $ر (جب ط)$  میں سے ہر ایک  
 مستدق ہو۔ اب انداز  $ر (جم ط)$ ،  $ر (جب ط)$  میں سے ہر ایک عددوں  $\pm 1$   
 کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں  $\mathcal{C}_j$   $ر (جم ط)$ ،  $\mathcal{C}_j$   $ر (جب ط)$  میں  
 سے ہر ایک کے لیے عدد  $س$ ۔  $س$  سلسلہ  $\mathcal{C}_j$  کے متناظر  
 جزوی باقی سے عدد اکم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ  $\mathcal{C}_j$  مستدق ہے تو  
 سلسلوں  $\mathcal{C}_j$   $ر (جم ط)$ ،  $\mathcal{C}_j$   $ر (جب ط)$  میں سے ہر ایک مستدق ہے،  
 اور اس لیے سلسلہ  $\mathcal{C}_i$  مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ

ح ن (جم ط ن + خ جب ط ن)

مستدق ہو سکتا ہے اور معہذا سلسلہ ح ن متبع -

اگر سلسلہ ح ن جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ

ح ن (جم ط ن + خ جب ط ن)

کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں -

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم ن<sup>۲</sup> (جم ن ط + خ جب ن ط) ہے مطلقاً

مستدق ہے کیونکہ سلسلہ ح ن<sup>۲</sup> مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی

عام رقم ن<sup>۲</sup> (جم ن ط + خ جب ن ط) ہے (جہاں  $2 \leq \pi < 10$ ) مطلقاً مستدق

نہیں ہے کیونکہ سلسلہ ح ن<sup>۲</sup> متبع ہے -

## مسلل تفاعل

(253)

۱۹۸ — فرض کرو کہ ملتف عدد ی = لا + خ ما کا ایک تفاعل

ف (ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لئے جو کسی

دیے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے - تب اس تفاعل کی ایک واحد

قیمت ہوگی اس شکل کے ہر نقطہ کے لئے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع

ہوتی ہے - یہ رقبہ، ی کو تعبیر کرینوالے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہو سکتا ہے

یا اس مستوی کا پورا حصہ -

کوئی تفاعل نقطہ ی = ی<sub>۱</sub> مسلسل کہلاتا ہے اگر ایک

ثابت عدد عا ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف (ی) - ف (ی<sub>۱</sub>) کا

مقیاس کسی مقررہ ثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوئی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی۔ ی۔ کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اس شرط کو پورا کرے اس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

## یکساں استدقاق

۱۹۹ — فرض کرو کہ ی یا لا + خ کا ایک تفاعل ف (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ  $f_1(y) + f_2(y) + f_3(y) + \dots + f_n(y) + \dots$  مستدق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو فا (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مجموعہ

$$f_1(y) + f_2(y) + f_3(y) + \dots + f_n(y) + \dots$$

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے س (ی) کے مساوی ہے ، تب

$$f_1(y) + f_2(y) + f_3(y) + \dots + f_n(y) + \dots$$

بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو ب (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$fa(y) = s(y) + b(y)$$



اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہوں کی ایک قیمت 'ی' پر غیر منحصر معلوم کی جاسکتی ہے ایسی کہ 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں 'ب' کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں  $m \leq n$  تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ کیساں طور پر مستدق ہوتا ہے 'ی' کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ میں موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد 'ن' قیمت میں صہ پر منحصر ہوگا۔

لیکن اگر 'ی' رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت 'ی' کے لا انتہا قریب آئے اور تمام باقیوں 'ب' (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے 'ن' کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ 'ی' کے قرب میں سلسلہ کیساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

نقطہ 'ی' کو جس کے لیے صہ متغیب ہو سکے ایسا کہ صورت مذکورہ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر کیساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر کیساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ 'ن' کی کوئی مستقل قیمت مقرر کی جاسکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر 'ی' کی تمام قیمتوں کے لیے 'ب' کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اس لیے یہ سلسلہ کیساں طور پر اس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا اگر 'ی' = 'ی' تو سلسلہ یا مستدق ہو سکتا ہے یا قمع۔

ہم اس امر کو یوں بیان کر سکتے ہیں :-

فرض کرو کہ جیسے 'ی' کسی ثابت قیمت 'ی' کے نزدیک آتا ہے

ایک ثابت عدد صہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف (دی) + ف (دی) + ف (دی) + ... کی رقموں کی وہ تعداد (جن کا لینا ضروری ہے تاکہ ا ب م (دی) | > صہ جہاں م < ن) ی - ی کے مقیاس پر منحصر ہو

اس طور پر کہ ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق (دی - ی) | گھٹتا ہے اور لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (دی - ی) | لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ ی کے قرب میں غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب مق ای - ی | کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے تو سلسلہ لا انتہا مست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستدق عددی سلسلہ لا انتہا مست رفتار سے مستدق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب ی = ی تو سلسلہ ف (دی) + ف (دی) + ... کا استدقاق، اگر سلسلہ مستدق ہے تو، لا انتہا مست نہیں ہے؛ صرف اُس صورت میں جبکہ ی متغیر ہو اس طور پر کہ مق ای - ی | لا انتہا گھٹے سلسلہ

$$ف (دی) + ف (دی) + \dots$$

لا انتہا مست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے کہ کوئی سلسلہ ایک نقطہ پر غیر یکساں طور پر مستدق ہے یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اُس نقطہ کے قریب غیر یکساں طور پر مستدق ہے۔ رقموں کی وہ تعداد جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی ب م (دی) کے مقیاس کافی طور پر چھوٹے عدد صہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ہی قیمت ی کے نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق ای - ی | لا انتہا گھٹے

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستحق ہے تو رقموں کی یہ تعداد اچانک ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عدد ن خود ایسے نقطہ کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔  
 اگر کسی رقبہ میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو

(255)

$$|f_m(y)| \geq \frac{1}{m} |f_m(y)| \dots |f_m(y)| \geq \frac{1}{m} \dots$$
 جہاں  $\frac{1}{m} \dots \frac{1}{m} \dots$  مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \dots$   
 + ... مستحق ہے تو سلسلہ

$$f_m(y) + f_m(y) + \dots + f_m(y) + \dots$$
 رقبہ میں یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استمقاق کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں بڑے کام آتی ہے؛ اس کو دیر شٹر اس کی جانچ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} + \dots$   
 م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں  $n \leq n$ ۔ نیز ی کی ہر قیمت کے لیے

$$|f_m(y)| + |f_m(y)| + \dots + |f_m(y)| + \dots + |f_m(y)| + \dots$$

کا متقیاس  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} + \dots$  سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی ہر قیمت کے لیے یہ درست ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متلف سلسلہ مستحق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے  $|f_m(y)| + \dots + |f_m(y)| + \dots$

بشرطیکہ ن < ن - اس لیے سلسلہ رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے -

نوٹ :- بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستحق اس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد ن معلوم ہوئے ایسا کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے باقی بچ کا مقیاس صہ سے کم ہو - لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اس تعریف سے زیادہ سخت ہے ؛ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستحق نہ ہوتے ہوں لیکن اس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں -

۴۰۰۔۔۔ اگر تغاعلات ف (ی) ف (ی) ... مسلسل ہوں ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ۱ میں موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تغاعل ف (ی) جو مستحق سلسلہ ف (ی) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تغاعل ہے ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو اس رقبہ ۱ میں موقوفہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ ف (ی) پورے رقبہ ۱ میں یکساں طور پر مستحق ہو -

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے ف (ی) = س + ب جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ ی کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے ب کا مقیاس صہ سے کم ہے - فرض کرو کہ ی میں مف ی کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس اضافہ کے متناظر ف (ی) س، اور ب میں اضافے علی الترتیب مف ف (ی)، مف س، مف ب ہیں - تب چونکہ بموجب فرض ب اور ب + مف ب کے مقیاس دونوں صہ سے کم ہیں اس لیے مف ب کا مقیاس ۲ صہ سے کم ہے -

نیز چونکہ سی، ی کا ایک سلسل تفاعل ہے اس لیے اگر مف ی کا  
 مقیاس کافی چھوٹا ہو تو مف سی کا مقیاس صہ سے کم ہوگا؛ پس  
 اگر مق مف ی ایک خاص قیمت سے کم ہو تو مف سی + مف بی کا  
 یا مف فا (ی) کا مقیاس صہ سے کم ہے کیونکہ مف سی + مف بی  
 کا مقیاس مف سی اور مف بی کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑا  
 نہیں ہے۔ اب صہ کو ہم اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا چاہیں؛ اس لیے  
 مف ی کو کافی چھوٹا لینے سے مق مف فا (ی) کو اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا  
 ہے جتنا ہم چاہیں؛ اس کے وہی معنی ہیں کہ تفاعل فا (ی) سلسل ہے۔  
 یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس ثبوت کے لیے یکساں استدقاق کی وہ کم  
 سخت تعریف کافی ہے جو دفعہ ۱۹۹ کے نوٹ میں دی گئی ہے۔

۲۰۱۔ — اگر ی کی قیمت ی کے لیے اس کے قرب میں سلسلہ کا  
 استدقاق غیر یکساں ہو تو یہ ضروری نہیں ہے کہ سلسلہ کا مجموعہ سلسل ہو؛  
 اس صورت میں دفعہ سابق کا استدلال ناکام رہتا ہے۔ تفاعل ف (ی)  
 کی انتہائی قیمت جبکہ ی = ی، ف (ی) ہے لیکن اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ  
 میے ی، ی کی طرف متدق ہونا ہے۔ ف (ی)۔ ف (ی) کو صفر کی طرف متدق ہونا ہے۔

ہم مجموعہ ف (ی)۔ ف (ی) کو فا (ن، ی) سے  
 تعبیر کر سکتے ہیں جو ن اور ی۔ ی کا تفاعل ہے۔ اب جبکہ ی کو پہلے  
 ی کے مساوی بنایا جاتا ہے اور پھر ن کو لا تنہا ہی بنایا جاتا ہے تو  
 فا (ن، ی) کی انتہائی قیمت صفر ہے؛ لیکن اگر ن کو پہلے لا تنہا ہی  
 بنایا جائے اور بعد میں ی۔ ی کو صفر تو فا (ن، ی) کی انتہائی قیمت

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\dots + \frac{1 + 5\lambda}{2(\lambda + 1)} + \dots + \frac{\lambda(2 + \lambda)n^2 + \lambda(3 - \lambda)n - 1}{n(1 + n)\{1 + \lambda(1 - n)\}(\lambda + 1)} + \dots$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر  $\lambda = 0$  تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\dots + \frac{1}{2 \times 1} + \dots + \frac{1}{n(1 + n)} + \dots$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{1}{n(1 + n)} + \frac{\lambda^2}{n(1 + n)\{1 + \lambda(1 - n)\}}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{(1 - n)\lambda + 1} \right\} - \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \lambda} \right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ  $\lambda$  کوئی قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔

سلسلہ  $\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots$  کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ،  $\lambda$  کی قیمت صفر کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

$n$  رقموں کے بعد باقی  $\frac{1}{1 + n} + \frac{1}{n(1 + \lambda)}$  ہے؛ اس کو صفر کے مساوی رکھنے

سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$n = \frac{\{2 + \lambda - 2\lambda\} + \{1 + \lambda - (2 + \lambda)\} - \{3 - \lambda\}}{2\lambda}$$

جو  $\lambda$  انتہا بڑھتا ہے جیسے  $\lambda \rightarrow \infty$  انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ  $\lambda$  انتہا  
تست و قیاس سے مستحق ہوتا ہے جبکہ  $\lambda \rightarrow 0$  انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم  
تسلل کی بھی وجہ ہے۔

سلسلوں کے کیساں اور غیر کیساں استیفاق کے درمیان امتیاز کا انکشاف بالعموم میڈیل (Siedel) (257)

سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اپنا مضمون "Note über eine Eigenschaft" بیورین اکاڈمی کے "Transactions" بابہ ۸۴ میں شائع کیا تھا، لیکن یہ نظریہ اس سے قبل اسٹوکس نے ایک مقالہ "On the Critical Values of the sums" میں شائع کیا تھا جس کو اس نے کیمبرج فلاسفکل سوسائٹی کے رد بروڈ ۶ دسمبر ۱۸۴۲ء کو پڑھا تھا۔ اگرچہ اس نظریہ کو سیڈیل نے اسٹوکس کی بہ نسبت بعض باتوں میں زیادہ مکمل طور پر بیان کیا ہے تاہم اسٹوکس کو اس امر میں سبقت حاصل ہے کہ اس نے ان تفاعلوں کے عدم تسلسل کی اصلی وجہ دریافت کی جو لاتناہی سلسلوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اس مضمون میں حال میں جو ترقی ہوئی ہے اس میں یکساں اور غیر یکساں استہفاق کے درمیانی امتیاز کو بہت اہمیت حاصل ہے۔

سیڈیل نے اس امر کو حسب ذیل مسئلہ میں مختصر کر دیا ہے :- اگر ایک مستقر سلسلہ دیا جائے جس کی واحد ارقام متغیری کے مسلسل تفاعل ہیں اور جو ی کے ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ایک نقطہ کے عین قرب میں جہاں تفاعل غیر مسلسل ہے ی کی قیمتیں مقرر کی جاسکتی ہیں ایسی کہ ان کے لیے سلسلہ اتنی سست رفتار سے مستقر ہو جتنی ہم چاہیں۔

## سلسلہ ہندسیہ

۲۰۲۔۔۔۔۔ سلسلہ ہندسیہ ۱ + ی - ی + ی - ی + ... + ی - ی پر غور کرو جہاں  
 ی = لا + خم = ر (خم ط + خر جب ط) - اس سلسلہ کا مجموعہ ہے  

$$\frac{1 - ی^۳}{1 - ی} \text{ یا } \frac{1 - ر (خم ط + خر جب ط)}{1 - ر (خم ط + خر جب ط)}$$
  
 رکھو ۱ - ر خم ط = خم ف ر جب ط = خم جب ف





رکھنے کی ضرورت ہے۔  
 سلسلہ ہندسیہ کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستحق  
 ہے اگر ی کا مقیاس  $\geq 1$  - ضہ سے جہاں ضہ کوئی مستقل مثبت عدد ہے  
 خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی  $n$  رقموں کے بعد باقی  $1 - \frac{1}{y^n}$  ہے اور اس کا مقیاس  
 $(1 - \frac{1}{y^n})$  سے کم ہے؛ تب سلسلہ ایسا ہو گا کہ  $y$  کی ان تمام قیمتوں کے لیے  
 جن کا مقیاس  $\geq 1$  - ضہ سے

اب (ی)  $\geq 1$  - ضہ

$$\text{اگر } \frac{(1 - \frac{1}{y^n})}{\text{ضہ}} > 1 \text{ یا اگر } n < \frac{\text{لوک ضہ} + \text{لوک ضہ}}{\text{لوک } (1 - \frac{1}{y^n})}$$

پس چونکہ  $n$  کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کہ  $y$  کی تمام قیمتوں کے لیے  
 (جن کے مقیاس  $\geq 1$  - ضہ سے)  $n$  رقموں کے بعد والے باقی ضہ سے کم ہوں  
 اور چونکہ  $n$  کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے  
 ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ  
 میں یکساں طور پر مستحق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبدأ پر) دائرہ  
 کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

## صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳۔ — اب ہم اس عام قوتی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \dots + \frac{1}{y^n} + \dots$$



استثنا کے)  $۱ +$  صدہ اور  $۱ -$  صدہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ زیادہ عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک مثبت عدد  $۱$  موجود ہو ایسا کہ  $n$  کی تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے)  $۱ +$  صدہ سے کم ہو اور نیز ایسا ہو کہ  $n$  کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے  $۱ +$  صدہ اور  $۱ -$  صدہ کے درمیان واقع ہو۔ ہر صورت میں عدد غ =  $\frac{1}{100}$ ۔ اس کو دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے اگر  $r > \frac{1}{100}$  اور متع ہوتا ہے اگر  $r < \frac{1}{100}$ ۔ کیونکہ  $n$  کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ایک محدود جٹ کے  $۱ +$  صدہ  $r > \frac{1}{100}$  جہاں صدہ اختیار ہے؛ اگر  $r > \frac{1}{100}$  تو ہم صدہ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ  $(۱ + صدہ) r > ۱$ ۔ تب سلسلہ کی تمام رقیں (سوائے ان کے ایک محدود جٹ کے) اس سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقموں سے کم ہوں گی جس کی نسبت مشترک  $(۱ + صدہ) r$  ایک سے کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستحق ہے۔ اگر  $r < \frac{1}{100}$  تو صدہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ  $(۱ - صدہ) r < ۱$ ، اور اس طرح  $n$  کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے  $۱ - صدہ < (۱ - صدہ) r < ۱$ ؛ اس لیے سلسلہ متع ہے۔

اگر  $\frac{1}{100}$  کی انتہا صفر کی طرف مستحق ہو جبکہ  $n$  کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو  $r$  کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔ کیونکہ اس صورت میں  $۱ + صدہ > (۱ + صدہ) r$  جہاں صدہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صدہ  $r > ۱$ ، اور  $n$  کی ہر قیمت کے لیے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے) درست ہے۔ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے ان کی ایک محدود تعداد کے ایک مستحق سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستحق

ہے۔ اس صورت میں غ = ص -

اگر  $\frac{1}{n}$  غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں میں  $\frac{1}{n}$  سے بڑا ہو تو سلسلہ کی تمام قیمتوں کے لیے  $\frac{1}{n} = 0$  قسح ہوتا ہے۔ اس صورت میں غ = 0۔ کیونکہ اگر ر کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی ان رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ قسح ہے۔

۲۰۴۔ دفعہ مابقی میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد غ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ص اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ  $ص + ر + عم + ر + عم + ر + ...$  مستحق ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے چھوٹی ہو، اور قسح ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے بڑی ہو۔ نقطہ ی = 0 کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غ کا ایک دائرہ

کھینچو۔ اس دائرہ کو سلسلہ  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$

کے استدقاق کا دائرہ کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے استدقاق کا نصف قطر کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر عدد ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$  کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستحق ہوتا ہے، اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو قسح ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جاسکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اگر متقی  $\leq$  غم اس واقعہ سے نتیجہ ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ اور یہ امر کہ سلسلہ قسح ہے اگر متقی کی قیمت  $\leq$  غم اس واقعہ سے نتیجہ ہوتا ہے

کہ استدقاق کی ضروری شرط نہا  $| \vee \text{ٹ} | = 0$  پوری نہیں ہوتی۔ کیونکہ

$$| \vee \text{ٹ} | = \left( \frac{1}{2} \right) \text{غم} \text{، اور } n \text{ کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے}$$

$$\text{غم} \text{ غم} < (1 - \text{غم}) \text{؛ اس لئے اگر صہ منتخب کیا جائے ایسا کہ}$$

$$1 < \left( \frac{1}{2} - \text{صہ} \right)$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ  $| \vee \text{ٹ} | < 1$  کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لئے۔

(201)

۲۰۵ — اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکزی  $= 0$  ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غم۔ ک ہے اور فرض کرو کہ غم ایک ثابت عدد ہے غم اور غم۔ ک کے درمیان۔ فرض کرو غم۔ ک = غم۔ صہ۔

$$\text{باقی } 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \text{ کے انتہائی مجموعہ کا مقیاس سلسلہ}$$

$$\text{غم} \text{ غم} + \text{غم} \text{ غم} + \text{غم} \text{ غم} + \dots$$

$$\text{غم} \text{ غم} \left( \frac{1}{2} \right) + \text{غم} \text{ غم} \left( \frac{1}{2} \right) + \dots$$



سلسلوں  $1 + ی + ی' + ی'' + \dots$

اور  $1 + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ ان کے مجموعوں کے تفاعل خا (ی) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ی کے مسلسل تفاعل ہیں۔

سلسلہ  $1 + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{n!} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر لامتناہی ہے مجموعہ کا تفاعل خا (ی) ی کی تمام حدود قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

سلسلہ  $1 + ل + ل' + ل'' + \dots + ل^{(n)} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر صفر ہے۔

۲۰۶ — استدقاق کے دائرہ کے محیط پر سلسلہ کا استدقاق اب تک (262)  
زیر بحث نہیں کیے۔ مسئلہ کے عام ہونے پر اثر نہیں پڑیگا اگر ہم استدقاق  
کے نصف قطر کو ایک فرض کر لیں۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ سلسلہ  $۱ + ل + ل' + ل'' + \dots$  جبکہ تمام  
حقیقی ہوں استدقاق کے دائرہ پر کے نقطوں کے لیے مستحق ہوتا ہے سو آئے  
نقطہ ی = ۱ کے اگر سر سب کے سب مثبت ہوں اور سوائے نقطہ ی = ۱ کے  
اگر سر باری باری سے مثبت اور منفی ہوں بشرطیکہ ہر دو صورتوں میں  
سر ۱، ۱، ۱، ۱، ... مطلق مقدار کے لحاظ سے نزولی ترتیب میں ہوں  
اور بشرطیکہ ۱ کی انتہا جبکہ ۱ کو لا انتہا بڑھا دیا جائے صفر ہو۔

فرض کرو کہ  $س = ۱ + ل + ل' + ل'' + \dots + ل^{(n)} + \dots$





جبکہ  $ی = ۱$ ۔ اس سلسلہ کا مستحق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ اشتقاق کے دائرہ صرف نیم مستحق ہو۔

اگر سلسلہ کے سر ملطف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں لے سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی۔ پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جاسکتا ہے

$$\text{سلسلہ } ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots$$

(263)

مستحق ہے جبکہ  $ی = ۱$  سوائے اس صورت کے جبکہ  $ی = ۱$  پس

$$\frac{۱}{۲} \text{ جم } ۱ ط، \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۱ ط \text{ دونوں مستحق ہیں سوائے اس کے}$$

پہلا سلسلہ متعین ہوتا ہے جبکہ ط صفر ہو یا  $\pi$  کا جفت ضعیف۔

۲۰۷۔ فرض کرو کہ فا (لا) کا وہ مسلسل تفاعل ہے

سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$  کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس

حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے

مستحق ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متعین ہوتا ہے جب

لا  $\leq ۱$  لیکن یہ کہ سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + \dots$  جو لا  $\leq ۱$  رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

اب ہم یہ بتائیں گے کہ سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + \dots$  کا مجموعہ فا (لا)

انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک

پہنچتا ہے۔ پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا  $\leq ۱$  کے لیے فا (۱) =

ہو گا فا (لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + \dots$  کے مجموعہ





میں تقسیم ہو سکتا ہے اور مسئلہ بالا این دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔  
اس لیے اگر سلسلہ  $1 + 1 + 1 + \dots$  مستحق ہو جبکہ  $1 = \text{جم } 1 + \text{خر جب } 1$   
تو اس کا مجموعہ،  $r = 1$  کے لیے  $(1 + 1)$  کی انتہا ہے جبکہ  $1$  کی قیمت کو  
مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے  
استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے۔ بلحاظ ان نقاط  
کے جو اس نقطہ میں سے گزریں والے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر  
پر ہیں۔

اس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

کی رقموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔  
مثلاً ان دو حقیقی سلسلوں

[illegible]

پر غور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستحق ہوتے ہیں اور ان کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب  $\lambda = 1$  تو ان سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جا چکا ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ  $\lambda$  کی قیمت  $\lambda = 1$  تک مسلسل ہے لیکن دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۳۰۸ — ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$\dots + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \dots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں نصف قطرک (C) کے دائرہ میں  
موقعہ تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فَا (ی) کی طرف مستدق  
ہوں۔ چونکہ وہ ی = کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستدق  
ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے  $A = B$  اور اس طرح  
یہ سلسلے  $A + A + A + \dots + B + B + B + \dots$  ایک ہی قیمت  
کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ مق ی  $\geq C$ ۔ یہ ناممکن ہے تاوقتیکہ  
یہ دو سلسلے

$$A + A + A + \dots + B + B + B + \dots$$

دونوں مستدق نہ ہوں اور مق ی  $\geq C$  کے لیے ان کے انتہائی  
مجموعے ایک ہی نہ ہوں۔ ان دو سلسلوں کے استدقاق کے  
نصف قطروں میں سے ہر ایک  $\leq C$  اور ان کے مجموعہ تفاعل  
(Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے  
اندر مسلسل ہیں۔ چونکہ ان کے مجموعہ تفاعل نصف قطرک کے  
دائرہ کے اندر ہی کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = کے مماثل ہیں  
اس لیے ان تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں  
جبکہ ی = اور اس لیے  $A = B$ ۔ اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے  
یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ان دو سلسلوں کے متناظر سرسب کے سب  
مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں۔

(265)

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ — فرض کرو کہ دو مطلقاً مستدق سلسلوں

$$۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کے انتہائی مجموعے  $S$ ،  $S$  سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستحق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ  $S$  ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی  $n$  رقموں کے مجموعہ کو  $S_n$  سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ  $۱$  اور  $b$  کے مقیاس علی الترتیب  $a$  اور  $b$  ہیں۔ اب چونکہ سلسلے  $S$ ،  $S$  مطلقاً مستحق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستحق ہیں؛ ان کے مجموعوں کو  $a$ ،  $b$  سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$S_n = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$T_n = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$S_n T_n = (۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots) (۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots)$$

$$S_n T_n = S_n T_n$$

اب  $S_n T_n > S_n T_n$  کیونکہ  $S_n$  میں حامل ضرب  $S_n$  کی نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور  $T_n$  میں  $a$  کی نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس  $S_n$  کی انتہا جبکہ  $n$  کو لا انتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ  $S_n$ ،  $T_n$  کی







مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ  $\geq$  س، کیونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ نیز عدد صحیح ق منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$س_۱ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ق_i}{س_i} ، س_۲ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ق_i}{س_i} ، ... ، س_r - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ق_i}{س_i}$$

سب کے سب صہ سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے سلسلہ م + م + ... کا انتہائی مجموعہ  $\leq$  س + س + ... + س - صہ سے بڑا ہے؛ اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ  $\leq$  س - صہ۔ اب چونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے سلسلہ م + م + ... کا انتہائی مجموعہ  $\leq$  س، لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ  $\geq$  س - پس یہ انتہائی مجموعہ س کے مساوی ہے۔

اگر مثبت اعداد م، م، م، ... ایسے ہوں کہ سلسلوں م، م، م، ... + م، م، م، ...

میں سے ہر سلسلہ ایک عدد س کی طرف مستدق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ س + س + ... + س ... مستدق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد م، م، م، ... مثبت عددوں

کے ایک مستدق دوہرے سلسلہ کی رقیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ س ہے۔ اس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اس دوہرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہو گا خواہ عمل جمع پہلے س کے لحاظ سے اور پھر ر کے لحاظ سے ہو یا اس ترتیب کے بالعکس۔ اس طرح

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{س_i}{س_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{س_i}{س_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{س_i}{س_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{س_i}{س_i}$$

اگر عددوں م، م، م، ... پر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر اعداد

(267)

اگر  $s$  | ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد  $s$  | ایک مطلقاً مستدق دوہرے سلسلے کی رقیں ہیں۔  
اگر وہ دوہرے سلسلہ جس کی رقیں  $s$  | ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

کیونکہ فرض کرو  $s$  | =  $s$  | - جہاں  $s$  | = جبکہ  $s$  | مثبت ہوتا ہے اور  $s$  | = جبکہ  $s$  | منفی ہوتا ہے۔ پس دیے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقیں مثبت اعداد  $s$  | اور  $s$  | ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام رتسم  $s$  | +  $s$  | ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقیں  $s$  | اور  $s$  | ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لے جاسکتے ہیں۔ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام رتسم  $s$  | ہے کسی ایک ترتیب میں حاصل جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جاسکتا ہے۔

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{s^r}$$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد  $s$  | مختلف ہوں اگر مقیاسوں |  $s$  | کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر  $s$  | =  $s$  | +  $s$  | تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں جیسے، ضمیمہ ہیں دونوں مطلقاً مستحق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

اس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے :-

اگر  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک مستقر سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم  $1$  کو ایک مطلقاً مستحق سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر سلسلہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

رکھا جاسکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ (266)

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

مستحق ہو جہاں  $1$  سے

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کریں گے حسب ذیل ہے :-

اگر  $1 + 1 + 1 + \dots$  ایک مستحق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ فلاں



ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔  
 اس خاص صورت میں جبکہ  $m$  مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود  
 ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ  $(1+m)$  ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو  
 بالعموم دیا جاتا ہے  $y$  کی ملٹف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔  
 ہم فرض کریں گے کہ  $y$  ایک ملٹف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف  
 اس صورت تک محدود رکھیں گے جس میں  $m$  حقیقی ہو۔ اس صورت  
 میں  $\frac{m}{1+m} = \frac{1}{1+m}$  جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے  
 اس سلسلے سے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر  
 کے اس دائرہ کے اندر کسی نقطہ  $y$  پر یہ سلسلہ مطلقاً مستحق ہے اور  
 اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستحق ہے۔  
 سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو  $f(m)$  سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا  
 مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوفہ نقطوں  
 کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(m) \times f(m) = f(m+m)$$

$$\text{اور اس لیے } f(m) \times f(m) \times f(m) \times \dots = f(m+m+m+\dots)$$

اول فرض کرو کہ  $m$  مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر ہے۔

$$m = \frac{p}{q} = \dots = m = \frac{p}{q} \text{ تو}$$

$$[f(\frac{p}{q})] = f(\frac{p}{q}) = f(p)$$

لیے ف (پ) کا ق واں جذر ہے یعنی (۱+ی) کا۔  
ض کرو کہ

$$۱ + رجم ط = رجم ف، رجب ط = رجب ف$$

ب (۱+ی) = ر (رجم پ ف + رجب پ ف)  
در اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$ر = \left\{ \frac{رجم پ ف + رجب پ ف}{ق} + \frac{رجم پ ف + رجب پ ف}{ق} \right\}$$

ہاں س کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ق-۱ ہیں۔ نیز

$$۱ + ۲ + ۳ + ... + رجم ط + ر =$$

در ہم ف کو مساوی رجب ط کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ  
ہے (ثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ رجم ف  
مستحقاق کے دائرہ کے اندر وقوع تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ ق-۱ { رجم پ ف + رجب پ ف }  
ایک قیمت ف (پ) ہے اور س کی ہمیشہ ہی قیمت ہوتی چاہئے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ  
مستحقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف (پ) ایک مسلسل  
مائل ہے۔

س کی قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو ف = ۰، تب ف (پ) حقیقی ہے

اور اس لیے

$$\{ \text{جم } \frac{2}{3} \text{ ق} + \text{خ جب } \frac{2}{3} \text{ ق} \}$$

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے  $s = 0$  یا  $s = \frac{1}{3} \text{ ق}$  اگر ق جفت ہے۔ اگر ر کافی طور پر چھوٹا ہے تو  $(\frac{2}{3} \text{ ق})$  یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے  $s$ ،  $\frac{1}{3} \text{ ق}$  کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ  $m$  ایک مثبت عدد  $\frac{2}{3} \text{ ق}$  ہو  $(+1 \text{ ی})$  کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(1 + 2 \text{ ر جم ط} + 3 \text{ ر}) \left( \text{جم } \frac{2}{3} \text{ ق} + \text{خ جب } \frac{2}{3} \text{ ق} \right)$$

جس میں جملہ  $(1 + 2 \text{ ر جم ط} + 3 \text{ ر})$  اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور نہ ، (270)

مس  $\frac{1}{1 + 2 \text{ ر جم ط}}$  کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں  $y = r$  (جم ط + خ جب ط)۔

نہایتاً فرض کرو کہ  $m$  ایک مثبت غیر منطوق عدد ہے؛ ہم اس کو مثبت

منطوق عددوں  $m$ ،  $m$ ،  $m$ ، ... کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ  $f(m)$ ،  $t$  تواتر  $f(m)$ ،  $f(m)$ ، ...

$f(m)$ ، ... کی انتہا ہے، یا  $f(m) = f(m)$  نہ اس  $f(m)$ ۔ استدلال

کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ کی لیے حاصل ہوتا ہے

$$ف(م, ر) = 1 + م, ر + \frac{م, ر(1-م, ر)}{2} + \dots + \frac{م, ر(م, ر-1) \dots (م, ر-ن+2)(م, ر-ن+1)}{1-n} + \dots + ب(ی)$$

جہاں  $ب(ی)$  مستحق سلسلہ

$$\frac{n(n+1) \dots (n+n-1)}{n} + \frac{n(n+1) \dots (n+n-1)}{1+n} + \dots + \frac{1+n}{1}$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں  $n$  ایک مثبت صحیح عدد ہے جو  $م, م, م, \dots$ ؛  
 $م, \dots$  میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔  $n$  کی کافی طور پر بڑی تمام  
 قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے  $ب(ی) > ص$  تمام اعداد  
 $م$  کے لیے جہاں  $ص$  اختیاری مثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ  
 محدود سلسلہ

$$1 + م, ر + \frac{م, ر(1-م, ر)}{2} + \dots + \frac{م, ر(م, ر-1) \dots (م, ر-ن+2)(م, ر-ن+1)}{1-n} + \dots + م, ر$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ  $م, م$  کی طرف مستحق ہو یہ ہے

$$1 + م, ی + \frac{م, ی(1-م, ی)}{2} + \dots + \frac{م, ی(م, ی-1) \dots (م, ی-ن+2)(م, ی-ن+1)}{1-n} + \dots + م, ی$$

اور اس لیے  $ف(م, ر) - ب(ی)$  کی انتہا ہے۔ غیر منطق قوت کی

تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب  $(ی+۱)$  کہ

کی خاص قیمت کی انتہا  $(ی+۱)$  ہے۔ چونکہ  $ب(ی)$  |

$> ص$  تمام اعداد  $م, م, م, \dots$  کے لیے ہے انتہا  $ب(ی)$  | جسکی



ایک مُعین قیمت ہونی چاہیے  $\geq$  صد ہے۔  
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$+م ی + \frac{م(۱-م)}{۱} ی + \dots + \frac{م(۱-م) \dots (۱-م-ن+۱)}{۱-ن} ی$$

(۱+۱) کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا  
مقیاس  $n$  کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صد سے بڑا نہیں  
ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ  $m$  کی مثبت غیر منطقی قیمت کے لیے  
مستحق ہے اور (۱+۱) کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

آخر میں فرض کرو کہ  $m$  ایک منفی عدد۔  $m$  ہے۔ تب بھی حاصل  
ہوتا ہے  $f(m) = f(0) = 1$ ، اس لیے  $f(m) = \frac{1}{f(m)}$ ؛  
یا  $f(m)$  (۱+۱) کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا (۱+۱) کی صدر  
قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$\text{سلسلہ } +م ی + \frac{م(۱-م)}{۱} ی + \dots + \frac{م(۱-م) \dots (۱-م-ن+۱)}{۱-ن} ی$$

کا مجموعہ  $y$  کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم  
ہے (۱+۱) کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$\frac{1}{2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})$$

جبکہ  $m$  کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالا میں  $y$  کا مقیاس رہے اور

اس کی دلیل ط ہے، اور ذہن  $\frac{1}{2}$  رجب ط کی وہ قیمت ہے جو  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$  کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اس کی کتاب "Analyse Algébrique" میں ملیگا۔

۲۱۲۔۔۔ اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہ گیا ہے جب کہ  $y = 1$  متقی

$$\text{سلسلہ } 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \dots$$

کی رقموں کو  $1, 1, 1, \dots$  سے تعبیر کریں تو  $\frac{1}{n} = (m-n) \mid (n+1)$ ،

اگر  $n < m$  تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اس سلسلہ کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے مستحق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخر الامر لانا انتہا چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ  $n > m + 1$  یعنی جبکہ

$m < 1$ ، پس سلسلہ نیم مستحق ہوتا ہے اگر  $m < 1$ ؛ لیکن اگر  $m > 1$  تو وہ قسح ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقادیریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب  $m < 1$  تو  $1$  کی مطلق مقدار

غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے  $n$  غیر معین طور پر بڑھتا ہے مثبت عدد  $m + 1$

کی بجائے  $s$  لکھو اور  $1$  کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی

کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو  $k$  سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد رہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|1| = k \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$> k \left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(1 + \frac{1}{r+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$> k \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

سلسلہ  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{n}$  کی پہلی رقوموں کا مجموعہ  $< \frac{1}{4}$  اور

ان کے بعد ۲ رقوموں کا مجموعہ بھی  $< \frac{1}{4}$  اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی

کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ  $\frac{1}{4}$  کے کسی مقررہ ضعف سے

بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لانا ہوتا بڑھتا ہے۔ اس سے

یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $|1|$  لانا ہوتا گھٹتا ہے جیسے ن لانا ہوتا بڑھتا ہے۔ جب  $m = 1$

تو ثنائی سلسلہ کی رقیں متبادلاً ۱ اور - ۱ ہیں اور اس لئے سلسلہ مستحق

نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \dots$$

مستحق ہوتا ہے جبکہ مق  $y = 1$  بشرطیکہ  $m < 1$  اور  $y \neq 1$ ۔

(271)

جب  $y = 1$ ۔ تو سلسلہ کی تمام رقیں ایک خاص رقم کے بعد

ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$$

لگانے سے سلسلہ مستحق ہو گا اگر

$$n \{1 - (n-m-1)\} < 1$$

یا اگر  $m < 0$ 

دفعہ ۲۰۷ میں مذکورہ مسئلہ کی بموجب جب سلسلہ

$$+m ی + - \frac{m(1-m)}{2} ی + \dots$$

استدقاق کے دائرہ پر مستدق ہوتا ہو تو اس کا مجموعہ جملہ

$$(1+2+3+\dots+m) \frac{1}{2} m (جم م فہ + خر جب م فہ)$$

کی قیمت ہے اس نقطہ پر۔ ہم پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

$$سلسلہ +m ی + \frac{m(1-m)}{2} ی + \dots + \frac{m(1-m)(1-m-1)}{2} ی + \dots$$

ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = بشرطیکہ م

مثبت ہو؛ نیز مستدق ہوتا ہے اگر م صفر اور -۱ کے درمیان ہو

ی کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ی = -۱ کے اور اس صورت میں ی کی

دلیل ۱۱ ہے۔ سلسلہ تسع ہوتا ہے جبکہ م = -۱ اور جبکہ م &gt; -۱ ی کی تمام

قیمتوں کے لیے جن کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے اس کا

$$مجموعہ (2+2+3+\dots+m) \frac{1}{2} m (جم م طہ + خر جب م طہ) ہے$$

جہاں طہ کی قیمت  $\pm 1$  کے درمیان واقع ہے۔

ایبل (Abel) نے ایک مقالہ میں جولا (Crelle's journal v. ۱۸) میں

شائع ہوا تمام کی منف قیمتوں کے لیے مسئلہ ثنائی کی عام صورت پر بحث کی ہے۔

## ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳۔ عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق (جم ط + خرب ط) کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے جم م ط + خرب م ط ہے اگر ط ۳۱ کے درمیان واقع ہو۔ (جم ط + خرب ط) کو شکل جم ط م (۱ + خ م ط م) میں لکھنے سے

$$\{ \dots + \frac{m(m-1)}{2} \text{ مسطه } + \dots \} - 1 = \text{حجم م ط} + \text{خج م ط} = \text{حجم ط}$$

$$+ \{ \text{م مس ط} - \frac{\text{م} (1 - \text{م}) (1 - \text{م})}{3} \text{مس ط} + \dots \}$$

بشرطیکہ سلسلہ مستحق ہو؛ یہ شرط پوری ہوگی اگر طہ حدود  $\pm \frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہو خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہوگی اگر طہ  $= \pm \frac{1}{n}$  بشرطیکہ م  $< 1$ ،

(۱) فرض کرو کہ م ثابت ہے، تب

$$\text{جم م ط} = \text{جم ط} - \{ 1 - \frac{م(1-م)}{ن} \} \text{مس ط}$$

$$\{ \dots - \frac{m(m-1)(m-2) \dots m}{m} +$$

جب  $m = 1$  = حجم ط {م مس ط} -  $\frac{2(1-m)(1-m)}{1} \text{ مس ط} + \dots$  (۱).....

م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ  $\pm \frac{1}{p} \pi$  کے درمیان واقع ہو،  
اور نیز سلسلے درست ہیں  $\pm \frac{1}{p} \pi$  کے لیے بھی۔ دفعہ ۱۵ میں

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے تھے اور اس صورت میں استدقاق کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے ان ضابطوں کی توسیعات ہیں۔  
(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو - م میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم ط} = ۱ - \frac{\text{م} (۱ + \text{م})}{۱} \text{م}^۲ \text{ط} + \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م}) (۳ + \text{م})}{۲} \text{م}^۳ \text{ط} + \dots (۳)$$

$$\text{جب م ط جم ط} = \text{م م ط}^۲ - \frac{\text{م} (۱ + \text{م}) (۲ + \text{م})}{۲} \text{م}^۲ \text{ط} + \dots (۴)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط  $\pm \frac{۱}{\text{م}}$  کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجے ط  $\pm \frac{۱}{\text{م}}$  کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م ۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴۔۔۔ دفعہ ماضی کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت

میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م فہ اور جب م فہ کے جملوں کو جب فہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کریں گے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م فہ} = ۱ - \frac{\text{م}^۲}{۲} \text{جب فہ} + \frac{\text{م}^۲ (۲ - \text{م})}{۲} \text{جب فہ}$$

$$- \frac{\text{م}^۳ (۲ - \text{م}) (۲ - ۲\text{م})}{۲} \text{جب فہ} + \dots (۵)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب } م \neq م \text{ جب } م - \frac{م(م-۱)}{۲} \text{ جب } م$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۶} \text{ جب } م - \dots - \dots (۶)$$

(27) یہ جملے اس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ حجم م م اور جب م م کے لیے جو جملے حجم م اور جب م کی قوتوں میں تھے ان میں حجم م کی قوتوں کی بجائے ۱۔ جب م کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر ان قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب م کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا۔ یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ حجم م مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ م،  $\pm \frac{۱}{۲}$  کے درمیان واقع ہو۔ اب ۱۔ حجم م کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ ثنائی پر بنیہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستحق ہونگے۔ چونکہ جب م کی قوتوں کے تمام سلسلے مستحق ہوتے ہیں اور چونکہ حجم م م، جب م کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب م کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ہرسم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ م،  $\pm \frac{۱}{۲}$  کے درمیان واقع ہو۔ پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ م جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو۔  
فرض کرو کہ سلسلہ

$$۱+ م (خ جب م) + \frac{م}{۲} (خ جب م) + \frac{م(م-۱)}{۲} (خ جب م) + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ  $f(m)$  سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو  $x$  سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔ جب  $m$  مثبت صحیح عدد ہو تو  $f(m) = \text{جم } m \text{ فہ} + x \text{ جب } m \text{ فہ}$  اگر  $فہ \pm \frac{1}{2} \pi$  کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ  $m$  صحیح اعداد ہوں تو

$$f(m) \times f(m) = (\text{جم } m \text{ فہ} + x \text{ جب } m \text{ فہ}) (\text{جم } m \text{ فہ} + x \text{ جب } m \text{ فہ})$$

$$= \text{جم } (m+m) \text{ فہ} + x \text{ جب } (m+m) \text{ فہ}$$

$$= f(m+m)$$

ان دو سلسلوں  $f(m)$ ،  $f(m)$  کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا خواہ  $m$  کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کر کے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$f(m) \times f(m) = f(m+m)$$

$m$  اور  $m$  کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً متفق ہیں۔ لہذا

$$f(m) f(m) f(m) \dots f(m) = f(m+m+m+\dots+m)$$

اب فرض کرو کہ  $m = \frac{1}{2} \pi = \dots = \frac{1}{2} \pi$  جہاں  $p$  اور  $q$  مثبت صحیح عدد ہیں

$$\left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) \right\}^p = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) \times p$$

پس  $f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$  کی ایک قیمت  $f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$  ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$\text{جم } \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \dots + \frac{1}{2}\pi \text{ جب } \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \dots + \frac{1}{2}\pi$$



جہاں س کوئی صحیح عدد ہے۔ اب جبکہ  $ف = ۰$ ، تو  $ف = \left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$ ،  
اس لیے چونکہ مجموعہ  $ف = \left(\frac{۱}{۲}\right)$  مسلسل بدلتا ہے جیسے  $ف = \frac{۱}{۲}$ ،  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$  تک بڑھتا ہے ہیں حال ہوتا چاہئے  $س = ۰$ ، اگر  $ف$  ان حدود کے  
درمیان واقع ہے، پس اس صورت میں

$$\text{میں } ف = \left(\frac{۱}{۲}\right) = \text{جم } ف + \text{خر جب } ف$$

ثانیاً فرض کرو کہ  $م$  ایک مثبت غیر منقطع عدد ہے جو منقطع اعداد  $م'، م''، م'''، \dots$   
کے ایک تواتر کی انتہا ہے۔ تب

$$ف (م) = ۱ + م (خر جب ف) + \frac{م'}{۲} (خر جب ف) + \dots + \frac{م'' (۱ - م') \dots (م' - م' - ۱)}{۱ - ۲}$$

$$+ \frac{م'' (م' - ۱) \dots (م' - م' - ۱)}{۲} (خر جب ف) + ب$$

جہاں  $ب$  اس مستحق سلسلہ

$$ن (۱ + ن) \dots (ن + ۱ - ۲) | \text{جب } ف = ۱ + ۲$$

$$+ \frac{ن (۲ + ن) \dots (ن + ۲ - ۲)}{۲ + ۲} | \text{جب } ف = ۲ + ۲ + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک مثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م، ... سے بڑا ہے۔ ف کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ  $|ب| > ص$ ، م کی تمام قیمتوں م، م، م، ... کے لیے جہاں ص کوئی اختیاری مثبت

عدد ہے۔

ف (م) کی انتہا یعنی جم م ف + خ جب م ف کی انتہا جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے جم م ف + خ جب م ف ہے تب نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$1 + م (خ جب ف) + \frac{م^2}{1} (خ جب ف) + \dots$$

$$+ \frac{م (م^2 - 1) \dots (م^2 - 1^2)}{1 - 1^2} (خ جب ف) +$$

$$+ \frac{م^2 (م^2 - 1^2) \dots (م^2 - 1^2)}{1^2} (خ جب ف) +$$

اور جم م ف + خ جب م ف میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا

مقیاس ص سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ ص اختیاری ہے یہ

غایت ہو چکا کہ  $\pm \frac{1}{n}$  کے درمیان ف کی ہر قیمت کے لیے

لاتناہی سلسلہ جم م ف + خ جب م ف کی طرف مستقر ہوتا ہے۔

آخر الامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد - م ہے۔

تب چونکہ ف (م) ف (م) = ف (۰) = ۱، اس لیے

$$f(m) = \frac{1}{\text{جم م نه} + \text{خر جب م نه}} = \text{جم م نه} + \text{خر جب م نه}$$

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م ذ} \setminus \text{جم ذ} = 1 - \frac{م^2 - 1}{1} \text{ جب } 1 \text{ ذ} + \frac{(م^2 - 1)(1 - م^2)}{3} \text{ جب } 3 \text{ ذ} - \dots, \dots$$

$$\text{جب م ذ} \setminus \text{جم ذ} = م \text{ جب } 3 \text{ ذ} - \frac{م(م^2 - 1)}{3} \text{ جب } 3 \text{ ذ}$$

$$+ \frac{م(م^2 - 1)(1 - م^2)}{3} \text{ جب } 3 \text{ ذ} - \dots, \dots (8)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ذ،  $\pm \frac{1}{3} \pi$  کے درمیان واقع ہو۔

سلسلے (۴) اور (۸) درست نہیں جبکہ ذ =  $\pm \frac{1}{3} \pi$ ۔

(277) سلسلہ (۴) صرف اس وقت ختم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح عدد ہو اور سلسلہ (۸) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔

۲۱۵ — اگر ہم جم م ذ + خر جب م ذ کے لیے وہ سلسلہ لیں جو (۵) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خر جب م ذ رکھیں تو چونکہ (جم ذ + خر جب م ذ) = (ما + ی + ی) ہمیں یہ پھیلاؤ ملتا ہے

$$(ما + ی + ی) = 1 + م ی + \frac{م^2}{1} ی + \frac{م(1 - م^2)}{3} ی + \frac{م^2(1 - م^2)}{3} ی$$

$$+ \dots + \frac{م(م^2 - 1)(1 - م^2)}{3} ی + \dots + 1 - م ی$$

$$+ \frac{م^2(م^2 - 1)(1 - م^2)}{3} ی + \dots + م ی$$



رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو فہ کی صفر اور  $\pi$  کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

$$(9) \quad \text{جم م} \left( \frac{\pi}{2} - \text{فہ} \right) = 1 - \frac{\text{م}}{2} \cdot \text{جم فہ} + \frac{\text{م}^2 (1 - \frac{\text{م}}{2})}{2} \cdot \text{جم فہ} - \dots$$

$$(10) \quad \text{جب م} \left( \frac{\pi}{2} - \text{فہ} \right) = \text{م جم فہ} - \frac{\text{م}^2 (1 - \frac{\text{م}}{2})}{2} \cdot \text{جم فہ} + \dots$$

اب ہم جم م فہ اور جب م فہ کے لیے سلسلے معلوم کر سکتے ہیں جبکہ فہ کی کوئی قیمت ہو۔ اگر فہ =  $\pi$  + فہ جہاں فہ،  $\pm \frac{1}{\pi}$  کے درمیان ہے اور  $\pi$  ایک صحیح عدد ہے تو

$$\text{جم م فہ} = \text{جم م} \pi + \text{جم م فہ} - \text{جب م} \pi + \text{جب م فہ}$$

نیز جب فہ =  $(1 - \frac{1}{\pi})$  جب فہ - پس اگر فہ =  $(\pi \pm \frac{1}{\pi})$  کے درمیان واقع ہو

$$\text{جم م فہ} = \text{جم م} \pi + (1 - \frac{1}{\pi}) \cdot \text{جب فہ} + \dots$$

$$- \text{جب م} (1 - \frac{1}{\pi}) \pi + \{ \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}^2 (1 - \frac{\text{م}}{2})}{2} \cdot \text{جب فہ} + \dots \}$$

(11) ....

اسی طرح

$$\text{جب م فہ} = \text{جب م} \pi + (1 - \frac{1}{\pi}) \cdot \text{جب فہ} + \dots$$

$$+ \text{جم م} (1 - \frac{1}{\pi}) \pi + \{ \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}^2 (1 - \frac{\text{م}}{2})}{2} \cdot \text{جب فہ} + \dots \} \dots (12)$$

ملہ ضابطوں (11)، (12)، (13)، (14) کو ڈی - ایف - مگرگوری نے

Cambridge Mathematical Journal vol. IV میں شائع کیا تھا۔

اسی طریقہ پر (۹) اور (۱۰) سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہو گئے :-

$$\text{جم م فہ} = \text{جم م} (۱ + ر۲) \frac{\pi}{۴} \left\{ ۱ - \frac{۲}{۳} \text{جم فہ} + \dots \right\}$$

$$+ \text{جم} (۱ - م) (۱ + ر۲) \frac{\pi}{۴} \left\{ \text{م جم فہ} - \frac{۲}{۳} (۱ - م) \text{جم فہ} + \dots \right\} \quad (۱۳)$$

$$\text{جب م فہ} = \text{جب م} (۱ + ر۲) \frac{\pi}{۴} \left\{ ۱ - \frac{۲}{۳} \text{جم فہ} + \dots \right\}$$

$$+ \text{جب} (۱ - م) (۱ + ر۲) \frac{\pi}{۴} \left\{ \text{م جم فہ} - \frac{۲}{۳} (۱ - م) \text{جم فہ} + \dots \right\} \quad (۱۴)$$

جہاں فہ، ر اور  $\frac{\pi}{۴} (۱ + ر۲)$  کے درمیان واقع ہے۔

۲۱۶۔ کچھ مفید سلسلے، (۵) اور (۶)، (۷) اور (۸) سے م کو مخصوص قیمتیں دینے سے اخذ کیے جاسکتے ہیں۔ فرض کرو فہ =  $\frac{۱}{۴} \pi$  تب (۵) اور (۶) میں م کی بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم} \frac{۱}{۴} \pi = لا = ۱ - \frac{لا}{۳} + \frac{لا(لا-۱)}{۵} - \dots \quad (۱۵)$$

$$\text{جب} \frac{۱}{۴} \pi = لا = لا - \frac{لا(لا-۱)}{۳} + \frac{لا(لا-۱)(لا-۲)}{۵} - \dots \quad (۱۶)$$

نیز (۵) اور (۸) میں م = ۲، فہ =  $\frac{۱}{۴} \pi$  فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لہ اس دفعہ کے سلسلے شیل باک (Shellbach) نے حاصل کیے تھے، دیکھو "Crelle's

Journal vol. XLVIII" ان پر گلیشر (Glaisher) نے بھی

Messenger of Mathematics, vols. II & VII میں بحث کی ہے (۱۵) اور (۱۶) کے مثل سلسلے

ام۔ ڈیوڈ نے "Bulletin de la Soc. Math. de France, vol. xi" میں دیے ہیں۔

$$\text{جم } \frac{1}{p} \pi = \pi - 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi (1-\pi)^2}{2} + \frac{\pi (1-\pi)^2 (1-\pi)}{6} - \dots (14)$$

$$\text{جب } \frac{1}{p} \pi = \pi - \left[ \pi - \frac{\pi (1-\pi)^2}{2} + \frac{\pi (1-\pi)^2 (1-\pi)}{6} - \dots \right] (18)$$

(279)  $\pi$  کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے حاصل کیے جاسکتے ہیں اس کے لیے  
 جم  $\frac{1}{p} \pi$  لا، جب  $\frac{1}{p} \pi$  لا، کو لا کی قوتوں میں پھیلا یا جائے اور لا کی  
 قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے متناظر قوت کے سروں کے مساوی  
 رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے  

$$\frac{\pi}{18} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{p} + 1 \right) \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{p} + 1 \right) \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{2} + \dots$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں

۲۱۸ — اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم م فہ، جب م فہ کے لیے  
 جب فہ کی قوتوں میں ہیں ہم ان سلسلوں کو م کی صعودی قوتوں کے  
 سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں  
 کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{m^2}{p} \text{ جب } f \text{ فہ} + \frac{m^2 (1+m^2)}{p} \text{ جب } f^2 \text{ فہ} + \dots$$

$$m \text{ جب } f \text{ فہ} + \frac{m (1+m^2)}{p} \text{ جب } f^2 \text{ فہ} + \dots$$



مستحق ہیں تو ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو حجم ف جب م ف کے پھیلاؤں کے (جو ف کی قوتوں میں ہوں) متناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۶) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ف = \text{جب } ف + \frac{1}{1} \times \frac{\text{جب } ف^2}{2} + \frac{3 \times 1}{2 \times 2} \times \frac{\text{جب } ف^3}{3} + \dots$$

$$+ \frac{\text{جب } ف^{14}}{14} \dots + \frac{(1-12) \dots \times 5 \times 3 \times 1}{12 \dots 9 \times 2 \times 2} \dots (19)$$

اور (۵) سے

$$ف^2 = \text{جب } ف^2 + \frac{2}{3} \times \frac{\text{جب } ف^3}{2} + \frac{3 \times 2}{5 \times 3} \times \frac{\text{جب } ف^4}{4} + \dots$$

$$+ \frac{(2-12) \dots \times 2 \times 2}{(1-12) \dots \times 5 \times 3} \times \frac{\text{جب } ف^5}{5} \dots (20)$$

یہ درست ہیں  $\pm \frac{1}{\pi}$  کے درمیان ف کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ  $ف = \pm \frac{1}{\pi} -$  ہم ان کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{جب } لا = لا + \frac{1}{3} \times \frac{لا^2}{2} + \frac{3 \times 1}{2 \times 2} \times \frac{لا^3}{3} + \dots (19)$$

$$(\text{جب } لا^2) = لا^2 + \frac{4}{3} \times \frac{لا^3}{2} + \frac{لا^4}{3} \times \frac{4}{2} + \dots (20)$$

جہاں جب لا دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی حلقہ زاویہ

ہے جس کی جیب لا کے مساوی ہے۔  
سلسلہ (۱۹) اکنیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریق ثبوت کوشی کا

۲۱۹۔۔۔۔۔ سلسلہ (۲۰) میں لا کو لا + ۵ میں بدلنے اور مساوات (280) کی جانبین میں ۵ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (یہ عمل لا کے لحاظ سے تفریق کرنے کے مماثل ہے جو دفعات ۲۱۰ اور ۲۰۸ کے مسئلوں کو استعمال کرنے سے جایز قرار دیا جاسکتا ہے) سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$(21) \quad \dots + \dots + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

یا لا کی بجائے جب ۵ رکھنے سے

$$(22) \quad \dots + \dots + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{2-1}$$

یا ۲ = ۲ لکھنے سے

$$\dots + \dots + \frac{2 \times 1}{5 \times 3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

جس کو لکھ سکتے ہیں

$$(23) \quad \dots + \dots + \frac{2 \times 1}{5 \times 3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{1-1}$$

نیز (۲۲) میں ۲ = ۲ رکھنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\{ \dots + \frac{1}{2(1+1)} \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{1+1} \frac{2}{3} + 1 \} \frac{1}{1+1} = 1$$

(۲۴) ..

## جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کو وضع فی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام میں بیان کرنا

۲۲۰ — اب ہم یہ دکھائینگے کہ شکل جم ط جب ط کے جملہ  
کس طرح آسانی کے ساتھ ط کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام میں  
بیان کیے جا سکتے ہیں۔ ہم اول تو اُس صورت تک اپنی توجہ محدود  
رکھینگے جس میں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کر دو کہ ی  
= جم ط + خر جب ط، تب تی<sup>۱</sup> = جم ط - خر جب ط؛ پس ۲ جم ط = ی + تی<sup>۱</sup>  
اور ۲ خر جب ط = ی - تی<sup>۱</sup> اور

$$(۲ \text{ جم ط}) = (۲ \text{ خر جب ط}) = (ی + تی^۱) - (ی - تی^۱)$$

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو ی اور تی<sup>۱</sup> کی قوتوں میں پھیلائیں تو  
نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے جس کی رقیں  
ان دو شکلوں ک (ی + تی<sup>۱</sup>)، ک (ی - تی<sup>۱</sup>) ہیں سے ایک کے مانند  
ہونگی جہاں ک ایک منسوب ہے جو م، ن اور ر پر منحصر ہے۔  
اب ی = جم ر ط + خر جب ر ط اور تی<sup>۱</sup> = جم ر ط - خر جب ر ط  
بموجب مسئلہ ڈیہموائر۔ اس لیے

$$ک (ی + تی^۱) = ۲ ک جم ر ط$$

$$۲ ک (ی - تی^۱) = ۲ خر ک جب ر ط$$

اس طرح ہمیں ختم ط جب ط کے لیے مطلوبہ جملہ ط کے ضیعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں حاصل ہو چکا۔

## مثال

(281)

جب طہ جم طہ کو طہ کے ضعفوں کے سلسلہ میں بیان کرو۔  
ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱ \text{ خ جب طه})^2 = (۲ \text{ جم طه})^2 = (۱ - ی) (۱ - ی) = (۱ - ی) (۱ - ی) = (۱ - ی) (۱ - ی)$$

$$= (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{557518629$$

$$= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

جو ۱۶ خ (جب ۱۱ ط + جب ۹ ط - جب ۷ ط + جب ۵ ط + جب ۳ ط + جب ۱ ط) کے مساوی ہے

جبت ط حتم =  $\frac{1}{11}$  (جب ۱۱ ط + جب ۹ ط - جب ۷ ط - جب ۵ ط + جب ۳ ط + جب ۱ ط)

اس عمل کو اس طرح بھی مرتب کر سکتے ہیں :-

$$1 + 4 + 10 + 20 + 15 + 4 + 1 = 7(2\text{مجموعه})$$

$$1 - 0 - 9 - 0 - 0 + 9 + 0 + 1 = 2 \text{ (مجموعه)}$$

$$1 + 2 + 2 + 2 - 1 - 2 - 2 + 2 + 1 = (2 \text{ جیب } 2)^2 = (2 \text{ جیب } 2)^2$$





دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

$$۲ ( \pm \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ذہ } ) \cdot \text{جم م } ( \frac{1}{p} \text{ ذہ } - \text{ک } \pi )$$

$$= ۱ + \text{م } \text{جم ذہ } + \frac{\text{م } (۱ - \text{م})}{۲} \cdot \text{جم } ۲ \text{ ذہ } + \frac{\text{م } (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \cdot \text{جم } ۳ \text{ ذہ } + \dots$$

$$۲ ( \pm \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ذہ } ) \cdot \text{جم م } ( \frac{1}{p} \text{ ذہ } - \text{ک } \pi )$$

$$= \text{م } \text{جم ذہ } + \frac{\text{م } (۱ - \text{م})}{۲} \cdot \text{جم } ۲ \text{ ذہ } + \frac{\text{م } (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \cdot \text{جم } ۳ \text{ ذہ } + \dots$$

جہاں ذہ (۲ - ک) اور  $\pi (۱ + \text{ک})$  کے درمیان واقع ہے سلسلہ اول کو جم م سے اور سلسلہ دوم کو جب م سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$۲ ( \pm \text{جم } \frac{1}{p} \text{ ذہ } ) \cdot \text{جم م } ( \text{جم م } - \frac{1}{p} \text{ م } + \text{ک } \pi ) = \text{جم م } + \text{جم م } ( \text{جم م } - \text{ذہ } )$$

$$+ \frac{\text{م } (۱ - \text{م})}{۲} \cdot \text{جم } ( \text{جم م } - ۲ \text{ ذہ } ) + \frac{\text{م } (۱ - \text{م}) (۲ - \text{م})}{۳} \cdot \text{جم } ( \text{جم م } - ۳ \text{ ذہ } ) + \dots$$

جہاں ذہ (۲ - ک) اور  $\pi (۱ + \text{ک})$  کے درمیان واقع ہے۔ فرض کرو کہ ذہ = ۲ ط تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

$$۲ \cdot \text{جم } ط \cdot \text{جم م } ( \text{جم م } - ۲ \text{ م } + ۲ \text{ س } \pi )$$

$$= \text{جم م } + \text{جم م } ( \text{جم م } - ۲ \text{ ط } ) + \frac{\text{م } (۱ - \text{م})}{۲} \cdot \text{جم } ( \text{جم م } - ۴ \text{ ط } ) + \dots$$

جہاں ط ۲ س -  $\pi \frac{1}{p}$  اور  $\pi \frac{1}{p} + \pi$  کے درمیان واقع ہے؛ لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

$$۲ (-جم ط) جم (ع-م ط + م ۲ س + ۱ \pi) \quad (۲۴)$$

$$= جم ط + م جم (ع-۲ ط) + \frac{م (۱-۲)}{۲} جم (ع-۲ ط) + \dots$$

جہاں ط، ۲ س، ۱/۴ اور ۲ س + ۱/۴ کے درمیان واقع ہے۔  
ان تینوں میں رکھو ع = م ط تو

$$۲ جم ط جم ۲ م س \pi$$

$$= جم ط + م جم (م-۲ ط) + \frac{م (۱-۲)}{۲} جم (م-۲ ط) + \dots (۲۵)$$

(283) جہاں ط، ۲ س، ۱/۴ اور ۲ س + ۱/۴ کے درمیان واقع ہے، نیز  
۲ (-جم ط) جم (۱+۲ س) م \pi

$$= جم م ط + م جم (م-۲ ط) + \frac{م (۱-۲)}{۲} جم (م-۲ ط) + \dots (۲۶)$$

جہاں ط، ۲ س، ۱/۴ اور ۲ س + ۱/۴ کے درمیان واقع ہے۔  
پھر رکھو ع = م ط + ۱/۴ تو  
۲ جم ط جب ۲ م س \pi

$$= جب م ط + م جب (م-۲ ط) + \frac{م (۱-۲)}{۲} جب (م-۲ ط) + \dots$$

جہاں ط، ۲ س، ۱/۴ اور ۲ س + ۱/۴ کے درمیان واقع ہے، نیز  
۲ (-جم ط) جب (۱+۲ س) م \pi

$$= جب م ط + م جب (م-۲ ط) + \frac{م (۱-۲)}{۲} جب (م-۲ ط) + \dots (۲۸)$$

جہاں ط، ۲ س، ۱/۴ اور ۲ س + ۱/۴ کے درمیان واقع ہے۔  
پھر ط کو ط - ۱/۴ میں بدلو اور رکھو ع = م ط تو

$$۲ جب ط جم م (۲ س + ۱/۴) \pi$$



$$= \text{جم م ط} - \text{م جم} (م-۲) \text{ ط} + \frac{م(۱-م)}{۲} \text{ جم} (م-۳) \text{ ط} - \dots \dots (۲۹)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور  $\pi (۱+۲س)$  کے درمیان واقع ہے، نیز  
 $\pi (۲ - \text{جب ط}، \text{م جم} (۲+س) \text{ ط} + \frac{۳}{۲})$

$$= \text{جم م ط} - \text{م جم} (م-۲) \text{ ط} + \frac{م(۱-م)}{۲} \text{ جم} (م-۳) \text{ ط} - \dots \dots (۳۰)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور  $\pi (۱+۲س)$  کے درمیان واقع ہے۔  
 بالآخر رکھو  $\text{م ط} + \frac{۱}{۲} \pi$  اور ط کو  $\frac{۱}{۲} \pi$  میں تبدیل کرو تو  
 $\pi (۲ - \text{جب ط}، \text{م جم} (۲+س) \text{ ط} + \frac{۳}{۲})$

$$= \text{جب م ط} - \text{م جب} (م-۲) \text{ ط} + \frac{م(۱-م)}{۲} \text{ جب} (م-۳) \text{ ط} - \dots \dots (۳۱)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور  $\pi (۱+۲س)$  کے درمیان واقع ہے، نیز  
 $\pi (۲ - \text{جب ط}، \text{م جب} (۲+س) \text{ ط} + \frac{۳}{۲})$

$$= \text{جب م ط} - \text{م جب} (م-۲) \text{ ط} + \frac{م(۱-م)}{۲} \text{ جب} (م-۳) \text{ ط} - \dots \dots (۳۲)$$

جہاں ط، ۲ س ۲ اور  $\pi (۱+۲س)$  کے درمیان واقع ہے۔  
 یہ سلسلے ط کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہیں اگر م مثبت ہو۔ اگر م  
 صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہے تو ط کی انتہائی قیمتیں ۲ س ۲  $\pm \frac{۱}{۲} \pi$  یا  
 ۲ س ۲  $\pi (۱+۲س)$  خارج کرنی چاہئیں کیونکہ ط کی ان قیمتوں  
 کے لئے سلسلے مستحق نہیں ہوتے۔

آئیل نے شنائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اس دفعہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان  
 کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے ان پر نظر نہیں ڈالی۔

(284)

# پندرہواں باب

## قوت نمائی تفاعل۔ لوکاتم

### قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳ - لا متناہی سلسلہ

$$1 + y + \frac{y^1}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots$$

پر غور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کریں گے جہاں ی  
لفظ عدد لا + خ ما ہے۔ اگر می کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \dots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت  
ن ویں رقم کے ساتھ  $\frac{1}{n}$  ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑھتا ہے۔  
پس ابتداء کی سلسلہ ی بھی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستحق ہے۔  
اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰  
پر ہو یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔

۲۲۴ - ی اور یلم کے جواب میں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں ایک

باہم ضرب دیا جائے تو ی، اور ی، میں م دیں درجے کی رقم ہے

$$\frac{y_1}{m} + \frac{y_1 - y_2}{m-1} + \frac{y_2}{m-2} + \dots + \frac{y_{m-2}}{2} + \frac{y_{m-1}}{1}$$

جو مسئلہ ثانی کی رُو سے  $\frac{1}{m} (y_1 + y_2 + \dots + y_m)$  کے مساوی ہے کیونکہ  
م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرہ صدر دو سلسلوں کے حامل صر  
کے لئے یہ سلسلہ

$$1 + (y_1 + y_2) + \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + \dots + \frac{(y_1 + y_2)^{m-1}}{m} + \dots$$

حامل ہوتا ہے جو ق (ی، + ی،) کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ اب  
دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ توت ثانی سلسلے دونوں  
مطلقاً مستحق ہیں انکے مجموعوں کا حامل ضرب مندرجہ بالا حامل ضربی  
سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے اس لئے

$$ق (ی،) + ق (ی،) = ق (ی، + ی،) \dots \dots \dots (۱)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً اخذ کرتے ہیں

$$ق (ی،) \times ق (ی،) \times \dots \times ق (ی،) = ق (ی، + ی،) \times ق (ی، + ی،) \times \dots \times ق (ی، + ی،)$$

$$\text{اور اسلئے } \{ ق (ی،) \}^n = ق (ان ی،) \dots \dots \dots (۲)$$

جہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۲۵۔ اگر مساوات (۲) میں ی = ۱ رکھا جائے تو

$$ق (ن) = \{ ق (۱) \}^n$$





جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ ہیں حاصل ہوتا ہے

$$(1 + \frac{y}{m}) = 1 + \frac{y}{m} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{y^3}{m^3} + \dots + \frac{y^m}{m^m} + \frac{y^{m+1}}{m^{m+1}} + \dots$$

..... +

$$= 1 + y + \frac{y^2}{m} + \frac{y^3}{m^2} + \dots + \frac{y^m}{m^{m-1}} + \frac{y^{m+1}}{m^m} + \dots$$

اب اگر 'ب' ج' ... کوئی مثبت حقیقی عدد ہوں ایک سے کم تو

$$(1 - b) < (1 - b) < (1 - b) < \dots < (1 - b) < (1 - b) < (1 - b) < \dots$$

پس  $(1 - b) < (1 - b) < (1 - b) < \dots < (1 - b) < (1 - b) < (1 - b) < \dots$  اور (فرض کرو)  $1 - طہ = طہ + ب + ج + \dots$  جہاں طہ، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ پس

$$(1 - \frac{1}{m}) \dots (1 - \frac{2}{m}) \dots (1 - \frac{m}{m}) = 1 - طہ$$

$$= 1 - طہ = \frac{m(m+1)}{m^2}$$

جہاں طہ، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔  
اب



$$\text{رکھو } ۱ + \frac{۱}{م} = \text{غہ جم نہ}، \frac{۱}{م} = \text{غہ جب نہ تو}$$

$$(۱ + \frac{۱}{م}) = \text{غہ} (جم نہ + خر جب نہ) = \text{غہ} (جم نہ + خر جب م نہ)$$

حسب سلسلہ دیموائر۔

نیز

$$\text{غہ} = \left[ ۱ + \frac{۱}{م} + \frac{۱}{م^۲} + \frac{۱}{م^۳} + \dots \right]$$

اور نہ، مس'  $\frac{۱}{۱+م}$  کی قدر قیمت ہے۔ غہ کی انتہائی قیمت

$$\left( ۱ + \frac{۱}{م} \right) \left\{ ۱ + \frac{۱}{(۱+م)} + \frac{۱}{(۱+م)^۲} + \dots \right\}$$

کی انتہائی قیمت ہے

$$\text{ق (لا)} \left\{ ۱ + \frac{۱}{م(۱+لا+لا^۲+لا^۳+...)} \right\}$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ ر، لام + لا لام سے کم ایک ثابت  
ثبت عدد ہے، تب

$$\left\{ ۱ + \frac{۱}{م(لام+لا+لا^۲+لا^۳+...)} \right\}$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left\{ ۱ + \frac{۱}{م^۲} + \frac{۱}{م^۳} + \dots \right\}$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور قوت  $\frac{۱}{لا^۲}$  کے درمیان۔ اب چونکہ







ایک تواتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ بالعموم ق (دی) کی  
صد قیمت مراد لیتے۔

اگر یہ حقیقی عدد نہ ہو تو  $\omega$  کی کوئی تعریف تاحال

نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رہا ہے۔

لیکن رمز ہو یا لاہور، غما کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنانا سہولت

بید کرتا ہے۔ ہم تو کو جو معنی پہنائیں گے اس کا صرف ایک جزو بیان کریں گے معنی صرف اس کی تعریف کریں گے جبکہ تو کی حد قیمت کہا جاسکتا

سے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

تفاعل کو کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کرینگے کہ

وہ تفاعل ق (ی) ہے یا (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل (ا + ی)

یہ دفعہ ۲۲۳ کے مسئلہ (۱) سے مستنت ہوتا ہے۔ ہم بالعموم رمز نو سے جب کہیں یہ استعمال ہوا اسکی صدر قیمت ق (ی) حسب تعریف بالا مراد لینے۔

۲۳۰۔ رمز نو + خا کے مفہوم سے متعلق اس قرار داد کے بعد دفعہ ۲۲۴ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{نو} + \text{خا} = \text{نو} (\text{جم} + \text{ما} + \text{خ جب} + \text{ما})$$

اور لا = رکھنے سے  $\text{نو} + \text{خا} = \text{جم} + \text{ما} + \text{خ جب} + \text{ما}$   
مسئلہ (۵) کو اب لکھا جاسکتا ہے

$$\left. \begin{aligned} \text{جم} + \text{ما} &= \frac{1}{4} (\text{نو} + \text{خا} - \text{قو} - \text{خا}) \\ \text{ج ب} + \text{ما} &= \frac{1}{4} (\text{نو} - \text{خا} - \text{قو} - \text{خا}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (۶)$$

انکو جیب التمام اور جیب کی قوت غائی قیمتیں کہتے ہیں۔ طالب علم

کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶) مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمزی طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جا چکا ہے۔ رمز نو کو رمز ق (خا) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ

قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۲ میں دیا گیا ہے بہت جلد دہن میں آجاتا ہے۔ مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت نماؤں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت نماؤں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہوگا جو

(۱) سے بیان ہوتا ہے۔  
۲۳۰۔ تفاعل نو کی تعریف ی کی کسی ملحق قیمت کیلئے

اوپر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت غائی سلسلہ

$$\dots + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 + 1$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$u^0 = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^m}{m} + \frac{u^{m+1}}{(m+1)}$$

جہاں  $\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+s} + \dots + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+s}$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\{ \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \} \frac{1}{1+s} > 1$$

(290)

$$y > \frac{1+s}{1+s} \text{ ای } 1$$

اگر ای  $a > 1$  تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\{ \dots + {}^2_1 | 1 | + {}^1_1 | 1 | + 1 \} \frac{{}^{1+s}_1 | 1 |}{1+s} > | 1 |$$

$$\frac{1}{1-a} > \frac{1+a}{1+a}$$

اس طرح ہم دیکھا چکے کہ

$$\text{ف} = ۱ + \text{ی} + \frac{\text{ی}}{۲} + \dots + \frac{\text{ی}}{\text{س}} (۱ + \text{عس})$$

جہاں  $\text{اعس} > \frac{۱}{۱ + \text{س}}$  اور اسلئے  $\text{ای}$  صفر کی طرف  
 مستحق ہوتا ہے جبکہ  $\text{ای}$  صفر کی طرف مستحق ہو۔ خاص صورت  
 میں  $\text{س} = ۱$  لینے سے سلسلہ  $\text{ف} = ۱ + \text{ی} (۱ + \text{ع})$  حاصل ہوتا ہے  
 جہاں  $\text{اع} > \frac{۱}{۲}$  اور اسلئے  $\text{اع}$  صفر کی طرف  
 مستحق ہوتا ہے جبکہ  $\text{ای}$  صفر کی طرف مستحق ہو۔ ہم اس نتیجہ کو

$$\text{ہی} = \frac{\text{ف} - ۱}{\text{ی}}$$

میں بیان کر سکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے  $\text{ہی} = \frac{\text{ف} - ۱}{\text{ی}}$  اور

اس لئے تفاعل  $\text{ف}$  ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔  
 علم تحلیل میں تفاعل  $\text{ف}$  کی ابتداء اس تعریف کے ساتھ کیجا سکتی ہے  
 کہ وہ ایسا تفاعل  $\text{ع}$  ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فری}} = \text{ع} \text{ ی کی ہر قیمت کے لئے}$$

$$\text{ع} = ۱ \text{ جبکہ } \text{ی} = ۱$$

اور

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$  موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستحق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے شقی سلسلہ  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$  میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستحق ہوتے ہیں۔ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو  $E$  سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے  $\frac{E}{2}$  ہے۔ اگر اب  $\frac{E}{2} = E$  فرمایا

تو ہم متناظر قوتوں کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں اس طرح  $۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$  اور اس لئے  $۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$  - جس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$E = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استساق کی مثلثیہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط  $\frac{E}{2}$  کو پورا کرتا ہے۔ اگر  $E = ۱$  جبکہ  $۱ = ۰$  تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے  $۱ = ۱ - ۱$  اس طرح ہم سلسلہ  $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

### قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت

(291)

۲۳۱۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ  $(ی) = (و) (جم) + (خ) (جب) + (م)$  اب چونکہ مابین  $۲$  ک  $۱۱$  جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

میج عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق (ی) = ق (ی) + ۲ (خک  $\pi$ ) یعنی ق (ی) دوری (periodic) تفاعل ہے جسکا دور ۲ خ  $\pi$  ہے۔ چونکہ  $\omega = \omega + 2\pi$  اسلئے قوت نمائی تفاعل  $\omega$  دوری ہے اور اسکا خیالی دور ۲ خ  $\pi$  ہے، نیز چونکہ  $\omega = \omega + 2\pi$  اس لئے  $\omega$ ، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی دور ۲  $\pi$  ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ  $\omega$ ،  $\omega$  میں سے ہر ایک تفاعل یک

دوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دور ۲ خ  $\pi$  ہے اور دوسرے تفاعل کا حقیقی دور ۲  $\pi$ ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے مبادیات سے واقف ہے جان لیگا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دوری کہتے ہیں ۲۳۲۔ دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی حصہ میں انکو ایک زاویائی مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال کیا ہے جہاں یہ زاویائی مقدار دائری ناپ میں محسوب کی گئی تھی لیکن ہم اس زاویائی مقدار کے تصور کو خارج کر سکتے ہیں اور انکو (جم ما) جب ما کو ایک متغیر کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں، بلاشبہ متغیر کی کوئی قیمت اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمائش کرتی ہے جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی بڑی اہمیت انکی خاصیت کی وجہ سے ہے کہ وہ یک دوری تفاعل ہیں۔ فوریر اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام تفاعل جو ایک حقیقی دور رکھتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک



سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تبصیر کئے جاسکتے ہیں لیکن علم تحلیل کی اس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

## دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳۔ دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور ان تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصاء ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندی تعلقات سے آزاد ہو۔ ان تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔ ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف ان مساواتوں

(292)

$$\text{جم ی} = \frac{1}{4} \left\{ \text{ق (خ ی)} + \text{ق (-خ ی)} \right\} \dots (۷)$$

$$\text{جب ی} = \frac{1}{4} \left\{ \text{ق (خ ی)} - \text{ق (-خ ی)} \right\} \dots (۸)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق (ی) سے سلسلہ ۱ + ی +  $\frac{۱}{۲}$  ی + ... کا

انتہائی مجموعہ تبصیر ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ ۱ -  $\frac{۱}{۲}$  ی +  $\frac{۱}{۴}$  ی - ... کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی

کی تعریف سلسلہ ی -  $\frac{۱}{۳}$  ی +  $\frac{۱}{۵}$  ی - ... کے انتہائی مجموعہ

کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم ان کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو اصل میں ہندی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کے مائل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۱۲۳ میں ثابت کردہ مسئلہ  $1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^s}{s} + \frac{y^s}{s+1} = 1 + y$  جس

کو استعمال کرنے سے جہاں  $|y| < 1$  ایسا  $\frac{1+y^s}{1+y}$  ہو ایسا ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر  $y$  کو  $x$  اور  $-x$  میں تبدیل کیا جائے اور  $s = m + 1$  فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

$$1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \dots + (-1)^m \frac{y^m}{m} + \frac{y^m}{m+1} = 1 - y$$

جہاں  $|y| < 1$  ایسا  $\frac{1+y^{m+1}}{2+y^{m+1}}$  ہو ایسا۔ بالخصوص  $y = 1$  جس سے

جہاں  $|y| < 1$  ایسا  $\frac{1+y^m}{2}$  ہو ایسا، اور  $y = 1$  جس سے  $1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^m}{m} + \frac{y^m}{m+1}$

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^m}{m} + \frac{y^m}{m+1} > 1 + y$$

نیز ایسا  $> 1$  کی صورت میں ہمیں مائل ہوتا ہے

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^m}{m} + \frac{y^m}{m+1} > 1 + y$$

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^m}{m} + \frac{y^m}{m+1} > 1 + y$$

اور

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب } ی = ی - \frac{۳}{۳۱} + \frac{۵}{۵} - \dots + (۱-۱) + \frac{۱۴۲۲}{۱+۲۲} + سَم$$

(293) جہاں  $اسَم > \frac{۱۴۲۲}{۳+۲۲} + ۱$  اور بالخصوص جب  $ی = ی + سَم$

جہاں  $اسَم > \frac{۲}{۳۱} + ۱$  اور جب  $ی = ی - \frac{۱}{۴} + سَم$

جہاں  $اسَم > \frac{۱}{۵} + ۱$  اگر  $ای > ۱$  تو نیز حاصل ہوتا ہے

$$سَم > \frac{۱}{(۱-۱)۲} + ۱، اسَم > \frac{۱}{(۱-۱)۵} + ۱$$

۲۳۳ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تفاعلات جمی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ چونکہ

جمی + خرب ی = ق (خری) اور جمی - خرب ی = ق (-خری)

اسلئے جمی + جب ی = ق (خری) ق (-خری) = ق (۰) = ۱

نیز جم (ی + ی) =  $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری + خری) + ق (-خری - خری) \}$

=  $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری) ق (خری) + ق (-خری) ق (-خری) \}$

=  $\frac{۱}{۴} \{ ق (خری) ق (-خری) + ق (-خری) ق (خری) \}$

+ {ق (خ ی)} - {ق (خ ی)} - {ق (خ ی)} - {ق (خ ی)}

جم (ی + ی) = جم ی جم ی۔ جب ی جب ی۔

اسی طرح جب (ی + ی) = جب ی جم ی + جم ی جب ی۔

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے مائل ہو جاتے ہیں۔

۲۳۵۔ فرض کر دو کہ ہم مساوات ق (ی) = ا پر غور کرتے ہیں۔

اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = کے۔  
کیونکہ قوت نامہ سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ  
اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے، اور نہ اکی کوئی منفی  
حقیقی اصل۔ لا ہو سکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا

بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (- لا) ق (لا) = ا سے ظاہر ہے۔

نیز مساوات ق (ی) = ا کی کوئی متغیر اصل ع + خ نہیں

ہو سکتی جہاں ا ع - -۔ کیونکہ اگر ع + خ = ا اصل ہو تو ع - خ =

بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲ ع) = ق (ع + خ) = ق (ع - خ) = ا

جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ ع اصل نہیں ہو سکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ا کی اصلیں اصل

ی = کے سو ا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے

کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا

کہ مساوات ق (خ ی) - ق (- خ ی) = یعنی جب ی = ۰ کی ایک

حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر یہ ایسی ایک اصل ہو تو

ق (۲ خ ی) = {ق (خ ی)} = ا

اور اس طرح ق (ی) = ا کی ایک اصل ۲ خ ی ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تعامل جب کہ جو سلسلہ

$$۱ - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (بہ) سے تعبیر کیا جائے تو ف (بہ) مثبت ہے بہ کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ  $0 \leq \beta \leq 3$  اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ  $\beta = 3$ ۔ اس سے نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ ۳ اور ۴ کے درمیان ایک قیمت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق تعداد کے لئے ف (بہ) صفر ہے، اور کسی صورت میں ف (بہ)  $\leq 0$  کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان ہے اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں۔

اگر بہ مثبت ہو اور  $3.5$  سے کم تو ف (بہ) کے سلسلہ میں ہر رقم بہ استثنائے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدد بڑی ہے۔ اس لئے ف (بہ)  $< 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ ، بہ کی ان قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہوں۔

اب ۱ -  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  کو ف (بہ) سے تعبیر کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ف (۲)  $= \frac{1}{6}$  جو مثبت ہے اور ف (۰)  $= 1$ ۔

نیز مشتق تفاعل ف (بہ)  $= 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  منفی ہے جبکہ بہ صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots < \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

پس ف (بہ) ایک سے  $\frac{1}{6}$  تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے بہ

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (بہ) صفر اور ۳ کے درمیان یہ کی قیمتوں کے لئے معدوم نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$ف (۴) > ۱ - \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۷} + \frac{۲}{۹}$$

$$> ۱ - \frac{۸}{۱۵} - \frac{۴}{۱۵} \times \frac{۱۵۶}{۱۸۹} > ۰$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (بہ) کی کم سے کم ایک اصل موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔  
ف (بہ) = کی عدد اچھوٹی سے چھوٹی اصل کو  $\pi$  سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف (ی) = کی ایک اصل  $\pi$  خ ہے اور اس سے صغیر تر مقياس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ نقطہ نظر سے عدد  $\pi$  کی تعریف اس عدد سے کی جاتی ہے جو مساوات ف (۲  $\pi$  خ) = کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ کوئی عدد صفر سے مختلف صغیر تر مقياس کے ساتھ مساوات ف (ی) = کی اصل نہ ہو۔ اگر گ کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی تو ف (۲ ک  $\pi$  خ) = ف (۲  $\pi$  خ) = ۱ اور اسلئے مساوات ف (ی) =

کی ایک اصل ۲ ک  $\pi$  خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲ پ  $\pi$  خ موجود نہیں ہے جہاں پ ک اور ک + ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ ایسی صورت میں مائل ہونا چاہئے

$$ف (۲ پ  $\pi$  خ - ۲ ک  $\pi$  خ) = ف (۲ پ  $\pi$  خ) ف (۲ ک  $\pi$  خ - ۲ ک  $\pi$  خ) = ۱$$

(295)

اور اس لئے ۲ (پ-ک)  $\pi$  خ جسکا مقياس ۲  $\pi$  خ کے مقياس سے صغیر تر ہے ف (ی) = کی اصل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ ۲  $\pi$  خ

اس اصل کو تعبیر کرتا ہے جسکا مقياس مغیر ترین ہے۔  
پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات  $ق(ی) = ا$  کی سب اصلیں  
شکل ۲ ک  $\pi$  خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور  $\pi$   
ایک صحیح عدد ہے جو ۲ اور ۴ کے درمیان واقع ہے جیسا کہ اوپر  
ثابت کر دیا گیا۔

اس طرح عدد  $\pi$  کو عقلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی  
کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$ق(ی + \pi ۲) = ق(ی) = ق(۲\pi + خ) = ق(ی)$   
اور اس لئے تفاعل  $ق(ی)$  ایک دوری تفاعل ہے جسکا خیالی  
دور  $\pi ۲$  خ ہے۔

جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ  
بھی دوری تفاعل ہیں جسکا دور  $\pi ۲$  ہے، اسلئے جم  $\pi ۲ = جم$ ۔ اور  
جب  $\pi ۲ = جب$ ۔ ہم نے اب تک اس امر کی تصدیق نہیں  
کی کہ  $\pi$  حسب تعریف بالا اس نسبت کے مال ہے جو ایک دائرہ  
کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے۔ لیکن اسکی تکمیل ایک  
حقیقی زاوے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے  
جیب التمام یا جیب کا دور  $\pi ۲$  ہے۔ عدد  $\pi$  کی کسی ایک تعریف کی وجہ  
۲۳۶۔ نیز چونکہ  $ق(خ) \times ق(خ) = ق(۲\pi + خ) = ا$ ،  
اسلئے  $ق(خ) = ا$  کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ  $+ ا$  کے مساوی  
نہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ  $خ \pi = ق(ی) = ا$  کی اصل نہیں ہے۔  
نیز  $ق(-خ) = -ا$  اسلئے جم  $\pi = -ا$  جب  $\pi = -ا$ ۔

پھر چونکہ  $ق(\frac{1}{\pi} خ) \times ق(\frac{1}{\pi} خ) = ق(خ) = -ا$

اور  $ق(\frac{1}{\pi} خ) \times ق(-\frac{1}{\pi} خ) = ا$

اسلئے  $ق ( \frac{1}{p} x ) = \pm x$  اور  $ق (- \frac{1}{p} x ) = \mp x$

اسلئے  $جم \frac{1}{p} = \pi$  اور جب  $\frac{1}{p} = \pi$ ، اس ایہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ی حقیقی ہو تو جب ی قیمتوں ی = ۰ اور ی =  $\pi$  کے درمیان لازماً مثبت ہے جیسا کہ دفعہ ۲۳۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے، اس لئے جب  $\frac{1}{p} = \pi$ ،  $۱ + = ۱ -$  اس طرح صفر،  $\frac{1}{p}$ ،  $\pi$ ،  $\pi$  کی جیب التمام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنیکے بعد ہم جمع کے مسئلوں کے ذریعہ جیب التمام اور جیب کے تفاعلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کر سکتے ہیں۔

اب تفاعلات سس ی، مم ی، قطی، قم ی کی تعریفات علی الترتیب ساواتوں سس ی = جب ی \ جم ی، مم ی = جم ی \ جب ی، قطی = ا \ جم ی، قم ی = ا \ جب ی کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم ان تفاعلات کی خاصیتیں معمولی طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

دائری تفاعلوں کی تمام خاصیتیں جو جو تھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں تحقق ہوئی تھیں جمع کے ضابطوں اور دورت کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں متفق دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۳۷۔ ایک اہم صورت وہ ہے جس میں ی بالکلیہ خیالی ہو اور خ ما کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$جم خ ما = \frac{1}{p} ( ق + ق ) جب خ ما = \frac{1}{p} ( ق - ق )$$

$$سس خ ما = \frac{1 - 1}{ق - ق} = \frac{0}{0}$$



جملوں  $\frac{1}{p}$  (نو + نو)،  $\frac{1}{p}$  (نو - نو)، نو - نو کو علی الترتیب ماکہ  
 زائدی جیب التمام، جیب اور ماس کہتے ہیں اور ان کو جنزما، جنزما،  
 مسزما کہتے ہیں، اس طرح  
 جنزما = جم خرما، جنزما = - خر جب خرما، مسزما = - خر مس خرما  
 ہم ان تفاعلوں پر ایک فاس باب میں غور کریں گے۔

## طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر  $ء = ق$  (ی) جو ملے متغیری کا ایک واحد القیمت  
 اتناسل ہے تو ہم  $ی = ق$  (ا) کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ  
 اساس نو پر  $ء$  کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی  
 نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ  $ق$  (ی) کے لحاظ سے دوری سے اسلئے  
 مقلوب تفاعل  $ق$  (ی) لامتناہی حد تک کثیر القیمتی ہوگا، اگر ی کی  
 ایک قیمت لوک  $ی$  ہو تو لوک  $ء$  کی عام قیمت لوک  $ء = لوک ء$   
 $۲ + خرک ۲$  سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ  $ق$  (ی) =  $ق$  (ی + ۲ خرک ۲)  
 جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بالخصوص ایک مثبت  
 حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک  $۲ + خرک ۲$  ہونے جہاں لوک لا لا  
 کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرو  $ء = ق$  (ی)،  $ء = ق$  (ی)،

تو چونکہ  $ق$  (ی)  $\times$   $ق$  (ی) =  $ق$  (ی + ی)

اسلئے حاصل ضرب  $ء، ء$  کے لوکارتم  $ق$  (ی + ی) کے لوکارتم ہیں  
 یعنی  $ی + ی، ۲ + خرک ۲$  یا

لوک  $۲ + خرک ۲$  = لوک  $ء$  = لوک  $(ء، ء) + ۲ خرک ۲$

ہم جملہ ۲ خک ۱۱ کو لوک (ع، عہ) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{لوک (ع، عہ)} = \text{لوک ع} + \text{لوک عہ}$$

اس مساوات سے کسی ایک لوکارتم کی مخصوص قیمت متعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو لوکارتم دئے گئے ہوں۔

اب فرض کرو کہ ع = غہ (جم نہ + خ جب نہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا حاصل ہوتا ہے لوک ع = لوک غہ + لوک (جم نہ + خ جب نہ) اور چونکہ ق (خ نہ) = جم نہ + خ جب نہ اس لئے لوک (جم نہ + خ جب نہ) کی ایک قیمت خ نہ ہے اور (۱۹۷) لوک غہ کی عام قیمت لوک غہ + ۲ خک ۱۱ ہے پس لوک ع کی عام قیمت ہے

$$\text{لوک ع} = \text{لوک غہ} + \text{خ} (نہ + ۲ اک ۱۱)$$

جہاں لوک غہ سے لوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے۔

اگر نہ پر - ۱۱ اور ۱۱ کے درمیان ہونی کی قید ہو تو ہم لوک غہ + خ نہ کو لوک ع کی صدر قیمت کہیں گے اور اس کو لوک ع سے تعبیر کریں گے پس لوک ع کی عام قیمت

$$\text{لوک ع} = \text{لوک ع} + ۲ خک ۱۱$$

سے ملتی ہے جہاں لوک ع اس کی صدر قیمت اور ک مثبت یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

لوک (لا + خ ما) =  $\frac{1}{2}$  لوک (لا + ما) + خ (مس +  $\frac{1}{2}$  ک ۲ +  $\frac{1}{2}$ ) ... (۸)  
 کسی حقیقی منفی عدد۔ لا کے لوکارتم کی صدر قیمت کی تعریف کافی طور پر  
 نہیں ہوتی ہے کیونکہ ایسی کسی مقدار کی دلیل ۱۱ ہو سکتی ہے یا - ۱۱، ۱۱ ہم  
 سہولت کے مد نظر ہم فرض کرینگے کہ اسکی صدر قیمت کے لئے دلیل ۱۱  
 ہے اور اس لئے اسکی صدر قیمت لوک لا + خ ۱۱ ہے اور اسکے لوکارتم  
 کی عام قیمت لوک لا + (ک ۲ + ۱) خ ۱۱ ہے۔  
 کسی حقیقی مثبت عدد لا کے لوکارتم کی عام قیمت  
 لوک لا = لوک لا + لوک ۱ = لوک لا + ۲ خ ک ۱۱  
 سے حاصل ہوتی ہے جہاں لوک لا صدر قیمت ہے۔

لوک خ کی صدر قیمت  $\frac{1}{2}$  ۱۱ خ ہے اسلئے لوک خ = (ک ۲ +  $\frac{1}{2}$ ) خ ۱۱  
 لوک (- خ) کی صدر قیمت -  $\frac{1}{2}$  ۱۱ خ ہے اسلئے لوک (- خ) = (ک ۲ -  $\frac{1}{2}$ ) خ ۱۱ -  
 ۱۱ کے لوکارتم کو مقیاس غہ اور دلیل ذہ کا ایک واحد القیت تفاعل سمجھ کر  
 اس پر غور کرنا ممکن ہے جبکہ دلیل ذہ - ۱۱ سے + ۱۱ تک تمام قیمتوں میں سے  
 گذرتی ہوئی فرض کیجئے اور پیر ۱۱ اور - ۱۱ کے درمیان واقع ہونے کی قید  
 نہ ہو جیسا کہ اس سے قبل تھی۔ تب ۱۱ کے لوکارتم غہ اور ذہ کا واحد القیت  
 تفاعل لوک غہ + خ ذہ ہے اور ہر دفعہ جبکہ ذہ میں ۱۱ کا اضافہ ہوتا ہے  
 ۱۱ کے لوکارتم بقدر ۲ خ ۱۱ کے بڑھتا ہے اور عدد ۱۱ کی عددی قیمت وہی ہوتی  
 ہے جو پہلے تھی۔ وہ طالب علم جو ریماں (Reimaum) کی سطحوں کے  
 نظریہ سے واقف ہے کثیر القیت تفاعل کو ایک واحد القیت تفاعل میں بدل کر  
 غور کرے اس طریقہ کے پورے فوائد کا اندازہ کر سکیگا۔

## عام قوت ثنائی تفاعل

۲۴۰۔ اگر کوئی عدد حقیقی یا ملت تو رمز ۱۱ سے ق (ی لوک) ۱۱

مراد لیا جاسکتا ہے جہاں لوک ۱، اپنی قیمتوں کی لا انتہا  
تعداد میں سے کوئی ایک قیمت اختیار کرتا ہے۔ اگر لوک ۱، اپنی صد  
قیمت لوک ۱ اختیار کرے تو ہم ق (۱ ی لوک ۱) کو ۱ کی صد  
قیمت کہینگے۔

(298) چونکہ ق (۱ ی لوک ۱) = ۱ +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۱}$  +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۲}$

اسلئے عام قوت نمائندہ ہے  
۱ = ۱ +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۱}$  +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۲}$  + .....  
اور ۱ کی صد قیمت

۱ = ۱ +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۱}$  +  $\frac{۱ ی لوک ۱}{۲}$  + .....  
سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ۱ اور ۱ دونوں حقیقی ہوں تو قوت نمائندہ کی معمولی شکل

۱ = ۱ +  $\frac{۱ لا لوک ۱}{۱}$  +  $\frac{۱ لا لوک ۱}{۲}$  + .....

حاصل ہوتی ہے جس سے ۱ کی صد قیمت ملتی ہے۔

۲۲۱ — مخصوص صورت ۱ = نو میں

لوک نو = لوک نو + ۲ خرک = ۱ + ۲ خرک ۱

اور رمز نو کے نام سے ق (۱ ی لوک نو) یا ق (۱ + ۲ خرک ۱)

ہیں۔ نو کی عام قیمت ق (۱) ہے اور یہ اس تعریف کے مطابق  
ہے جو دفعہ ۲۲۹ میں دی گئی تھی۔ اسلئے نو کی عام قیمت

ق (ی) (جم ۲ ک ۲ ی + خ جب ۲ ک ۲ ی)

ہے۔ ہم اب بھی فرض تو اسکی صدر قیمت مزید دیتے رہیں گے۔

۲۲۲ — دنا کی عام قیمت حسب تعریف بالا ق { ی (لوک ر + خ ط  
+ ۲ خ ک ۲) } کے عامل ہے جہاں  $1 = ر$  (جم ط + خ جب ط)  
= عد + خ یہ اور ط — ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہے، ی = لا  
+ خ ما کہنے سے (عد + خ یہ) + خ ما کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل

ہوتا ہے

ق { لا لوک ر — ط ما — ۲ ک ۲ ما + خ ر ما لوک ر + لا ط + ۲ ک ۲ لا }

جو لا لوک ر — ط ما — ۲ ک ۲ { جم (ما لوک ر + لا ط + ۲ ک ۲ لا )

+ خ جب (ما لوک ر + لا ط + ۲ ک ۲ لا ) }

کے مساوی ہے۔ اسلئے (عد + خ یہ) + خ ما کی صدر قیمت ہے

لا لوک ر — ط ما { جم (ما لوک ر + لا ط) + خ جب (ما لوک ر + لا ط) }

جہاں  $ر = 1 = عد + ۲ یہ + ط = مس$  ۱

یہ ضروری نہیں کہ مس ۱ کی صدر قیمت جس کی تعریف  
دفعہ ۳ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر  $ر = ۱$  تو (جم ط + خ جب ط) + خ ما کی صدر قیمت کے لئے

تفاضل ق { خ ط (لا + خ ما) } عامل ہوتا ہے جسکو مس جم (لا + خ ما) ط

+ جب (لا + خ) ط میں لکھا جاسکتا ہے، یہ ڈیموہائر کے مسئلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت ناملف ہو۔

۲۲۳۔ مساوات  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  کے درست رہنے

کے لئے ہیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$  کی قیمتیں وہ ہیں جو لوگ  $\frac{1}{2}$  کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورتیں

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 + \text{خ} 2 \} \times \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 \}$$

$$= \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 + \text{خ} 2 \} \times \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 \}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہوگی اگر ان دو تفاعلوں  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$  میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ ان مخصوص مساوات  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ان تفاعلوں کی صدر قیمتوں کی صورت میں درست ہے۔

۲۲۴۔ جملہ  $\frac{1}{2}$  کا  $\frac{1}{2}$  کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن  $\frac{1}{2}$  کی ہر قیمت،  $\frac{1}{2}$  کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$$\frac{1}{2} = \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 = \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 + \text{خ} 2 \}$$

اور  $\frac{1}{2} = \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 = \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 + \text{خ} 2 \}$

$$= \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 + \text{خ} 2 \} \times \{ \text{ق} (1) \text{ لوگ } 2 \}$$

اسلئے  $\Delta A_1 A_2$  کی قیمتیں،  $(A_1 A_2)$  کی صرف دو قیمتیں ہیں جو کہ = کی صورت میں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم ہر صورت میں صد قیمتیں لیں تو مساوات  $\Delta A_1 A_2 = (A_1 A_2)$  درست ہے۔

اگر ہم ربوز  $\Delta A_1$  کو انکی صد قیمتوں ق (دی لوک  $\Delta$ ) ق (دی) کے مماثل لیں جو بالعصوم عمل میں کیا جاتا ہے تو ہم ابھی دکھا چکے ہیں کہ ان جملوں میں جنہیں یہ رموز واقع ہوتے ہیں اعمال کی تحمیل قوت ثنائوں کے معمولی قاعدوں کے مطابق کیا جاسکتی ہے جیسا کہ عام طور پر جبر و مقابلہ میں کیا جاتا ہے۔

## مثال

اگر 'ا' ب' ج' د'..... ایک منظم ن شلخی کثیر الاضلاع کے واس ہوں جو نصف قطر  $\Delta$  کے دائرہ میں کھینچا گیا ہے جس کا مرکز وہ ہے تو ثابت کرو کہ ان زاویوں کا مجموعہ جو 'ا' ب' ج' د'.....

نصف قطر و ب کے ساتھ بناتے ہیں مسا  $\frac{\Delta \text{ جب ن ط}}{\Delta \text{ جم ن ط}}$  ہے جہاں

و ب = ر اور زاویہ  $\Delta$  و ب = ط۔

چونکہ  $\Delta \text{ ر} = \Delta \text{ و} \text{ ط} = \frac{\Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن}}{\Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن}}$  { ر۔ و و ط +  $\frac{\Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن}}{\Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن} = \Delta \text{ ن}}$  }

اسلئے لوکار تم لینے سے

لوک (ر)۔  $\Delta \text{ جم ن ط}$ ۔  $\Delta \text{ و} \Delta \text{ جب ن ط}$

$$= \frac{س = ن - ۱}{لک} \{ ر - (جم + ط) + \frac{س}{ن} \} - (جم + ط) + \frac{س}{ن} \}$$

اور اس مساوات کی طرف میں خ کے تہریں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{س = ن - ۱}{لک} = \frac{جم + ط}{ن} \quad \text{اس سے} \quad \frac{جم + ط}{ن} = \frac{س = ن - ۱}{لک}$$

(300) جہاں متعوب تفاعلوں کی متناظر قیمتیں لگائی ہیں۔ اس مساوات کی پائین طرف کا جملہ ان زاویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطریں، و تروں اپ ب پ کے ساتھ بنائے ہیں، اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$\frac{س = ن - ۱}{لک} = \frac{جم + ط}{ن}$$

## کسی اساس پر لوکارتم

۲۴۵۔ اگر دیا کی صدر قیمت ۷ کے مساوی ہو تو ی کو ۷ کا لوکارتم اساس د پر کہتے ہیں اور اسکو لوگ ۷ لکھ سکتے ہیں۔ اب دیا کی صدر قیمت ق (ی لوگ ۷) ہے جہاں لوگ ۷، د کا لوکارتم اساس ہو چکا ہے، اور اگر ق (ی لوگ ۷) = ۷ تو

$$ق (ی لوگ ۷) = ۷ \quad \text{لوگ ۷} = ۷ \quad \text{لوگ ۷} = ۷ \quad \text{لوگ ۷} = ۷$$

اس لئے لوگ ۷ = لوگ ۷ (لوگ ۷) = (لوگ ۷ + ۲) (لوگ ۷) (لوگ ۷) لوگ ۷ کی صدر قیمت کو ہم لوگ ۷ (لوگ ۷) لیتے ہیں اور اسکو



لوک ۶ء سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس عام قیمت ہے  
 لوک ۶ء = لوک ۶ + ۲ خک ۱۱ \ لوک ۱  
 جو ایک کثیر القیمیت تفاعل ہے جس میں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خک ۱۱ \ لوک ۱  
 کے ضعیفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت  
 ۱ = ۱۱ میں اوپر کی تعریف دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے  
 مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک ۶ء کی عام قیمت کیلئے لوک ۶ + ۲ خک ۱۱  
 مائل ہوتا ہے۔

## عام ترین لوکارتم

۲۳۶۔ ہم لوکارتم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ  
 سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر  $\Delta$  کی کوئی قیمت  $\epsilon$  کے مساوی ہو تو  $\epsilon$  کا لوکارتم

اساس  $\Delta$  پر ہے اور لکھا جاسکتا ہے [لوک  $\epsilon$ ] تاکہ لوک  $\epsilon$  سے جو دفعہ  
 سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔  $\Delta$  کی عام ترین قیمت  
 ق (ی لوک  $\Delta$ ) ہے اور اگر یہ قیمت  $\epsilon$  کے مساوی ہو تو

ی لوک  $\Delta$  = لوک  $\epsilon$  یا ی (لوک  $\Delta$  + ۲ خک ۱۱) = لوک  $\Delta$  + ۲ خک ۱۱

جہاں ک اور ک صحیح اعداد ہیں۔ پس [لوک  $\epsilon$ ] کی عام قیمت

لوک  $\rho$  ع | لوک  $\rho$  ا | یا (لوک  $\rho$  ع + ۱ خک  $\pi$ ) | (لوک  $\rho$  ا + ۱ خک  $\pi$ )  
 بنیاد و طرح سے "متناہی حد تک کثیر القیمتی ہے۔ اسلئے" [لوک  $\rho$  ع]  
 کی قیمتوں میں ک = ... کہنے سے جو مخصوص جٹ حاصل ہوتا ہے آئیں  
 لوکارتم لوک  $\rho$  ع شریک ہیں۔ ہم [لوک  $\rho$  ع] کو عام ترین  
 لوکارتم اساس ۱ پر کہہ سکتے ہیں۔

۲۴۷ - اگر ۱ = تو [لوک  $\rho$  ع] = (لوک  $\rho$  ع + ۲ خک  $\pi$ ) | ۱  
 ۲ + خک  $\pi$  جو اساس ۱ پر ع کے عام ترین لوکارتم کے لئے جملہ  
 ہے۔ زیادہ تشبیہ لوکارتم لوک  $\rho$  ع کی صورت میں ہم نے ی کی  
 تعریف یہ کی تھی کہ وہ لوک  $\rho$  ع کی ایک قیمت ہے جبکہ  $\rho$  کی صد  
 قیمت ع کے مساوی ہو، لیکن عام ترین لوکارتم [لوک  $\rho$  ع] کی صورت  
 میں ہم ی کو [لوک  $\rho$  ع] کی ایک قیمت سمجھتے ہیں جبکہ  $\rho$  کی  
 کوئی قیمت ع کے مساوی ہو۔

[لوک  $\rho$  ا] کی عام ترین قیمت ۲ خک  $\pi$  | (۱ + ۲ خک  $\pi$ )  
 ہے اور [لوک  $\rho$  (-۱)] کی (۲ + ۱ خک  $\pi$ ) | (۱ + ۲ خک  $\pi$ ) -  
 جملہ (لوک  $\rho$  ع + ۲ خک  $\pi$ ) | (۱ + ۲ خک  $\pi$ ) پر دوسرے نقطہ  
 نگاہ سے بحث کیا جاسکتی ہے۔ {ق (۲ + ۱ خک  $\pi$ )} | (لوک  $\rho$  ع + ۲ خک  $\pi$ ) کی صد  
 قیمت مسد (۲) کی رو سے ق (لوک  $\rho$  ع + ۲ خک  $\pi$ ) ہے جو ع کے  
 مساوی ہے۔ اس لئے (لوک  $\rho$  ع + ۲ خک  $\pi$ ) | (۱ + ۲ خک  $\pi$ ) کو دیکھو ۲۴۸

کی تعریف کی بموجب ء کالو کارتم اساس ق (۱+۲ خک ۱۱) پر سمجھا جاسکتا ہے اور یہ اساس نو کی نہیں بلکہ نو (۱+۲ خک ۱۱) کی صد قیمت ہے، اسلئے

فی الحقیقت ہیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ء] لوک ق (۱+۲ خک ۱۱) ء کی قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ ک کو مختلف قیمتیں دی جائیں۔ پس ہم اساس نو پر عام ترین لوکاتوں کو معمولی لوکارتم اساس نو پر نہیں بلکہ اساس نو (۱+۲ خک ۱۱) پر سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدد نو کے مساوی ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں۔

۲۳۸ - اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی عدد کالو کارتم حقیقی ہو سکتا ہے یا نہیں، مثلاً ۱/۲ کو۔ ہاؤ کالو کارتم

سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ نو کی قیمتیں ± ہاؤ ہیں۔ اس سوال کا جواب اس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارتم کے لئے اختیار کریں، اگر ہم دفعہ ۲۳۸ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی، ء کا لوکارتم ہے جبکہ نو کی صد قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم نہیں ہو سکتا، لیکن اگر ہم دفعہ ۲۳۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی، ء کالو کارتم ہے جبکہ نو کی کوئی قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارتم ہو سکتا ہے۔ اگر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

$$[\text{لوک}(-ر)] = \frac{\text{لوک} ر + (۱+ک) \times ۱}{۱+ک \times ۱}$$

$$\frac{\{\text{لوک} ر + (۱+ک) \times ۱\} + \{۱+ک \times ۱\} - ۱ - (۱+ک) \times ۱}{۱+ک \times ۱}$$

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک  $r = (۲ک + ۱) \backslash ۲ک$ ۔ پس اگر  $r$  ہو ایسا کہ  
لوک  $r$  کی شکل  $(۲ک + ۱) \backslash ۲ک$  ہو چاہا کہ اور ک صحیح عدد  
ہیں تو [لوک  $(-r)$ ] کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک  $r$  کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد  $r$  معلوم کر سکتے ہیں  
ایسا کہ ہمیں اور  $r$  میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک  $(-r)$ ] کی  
ایک قیمت حقیقی ہو کیونکہ ایک کسر  $\frac{1}{n}$  اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم  
ہو سکتی ہے جو لوک  $r$  سے اس قدر کم فرق رکھے جقدر ہم چاہیں۔ فرض کو کہ

لوک  $r = \frac{1}{n}$ ، تب اگر ق جنت ہے تو [لوک  $(-r)$ ] کی ایک قیمت  
حقیقی ہے اور  $r = \frac{1}{n}$ ، لیکن اگر ق طاق ہے تو  $r = \frac{1}{2n}$  تو  $r = \frac{1}{2n}$

اور تو  $r = \frac{1}{2n}$  کو  $s$  کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، یا لوک  $r$  کو  $\frac{1}{2n}$  کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد  $\frac{1}{2n}$  = لوک  $r$  معلوم ہو سکتا ہے

جو لوک  $r$  سے اس قدر کم فرق رکھے جقدر ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ  
[لوک  $(-r)$ ] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ  
اگر چہ  $r$  کی ہر قیمت کے جواب میں [لوک  $(-r)$ ] کی ایک قیمت حقیقی  
نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد  $r$  معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ  $r = \frac{1}{2n}$  اتنا  
چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک  $(-r)$ ] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

### لوکار متنی سلسلہ

۲۴۹ -  $(۱+۱) \backslash (۱+۱)$  کی قدر قیمت ق {م لوک  $(۱+۱)$ } ہے





شکل

$$\text{ہی} = \frac{\text{لوک نو (۱+۱) - ۱}}{۱} = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{اگر 'ای' سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو (۱ + \frac{۱}{م}) =$$

م لوک نو (۱+۱) م (۱+۱) ط، جہاں ط، 'ای' کے ساتھ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھتے دے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تو آخر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ (۱ + \frac{۱}{م}) کی اتہا ٹو ہے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف اس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے جس میں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اٹھ چکی ہے۔

$$۲۵۰ - ی = ر (رجم ط + خر جب ط) کہنے سے$$

$$\text{لوک نو (۱+۱)} = \text{لوک نو (۱+رجم ط + خر جب ط)}$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ لوک نو (۱+۲ رجم ط + ر)} + \text{خر سن (۱+رجب ط) (۱)}$$

$$+ \text{رجم ط (۱)}$$

جہاں مقلوب ماس اپنی صد قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل

دو سلسلے ملتے ہیں

$$\frac{1}{p} \text{ لوک } (1 + 2 \text{ رجم طہ} + 3 \text{ رجم طہ}) = \text{رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{مس } \left\{ \text{رجم طہ} \right\} (1 + \text{رجم طہ}) = \text{رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots (11)$$

جہاں  $r > 1$  یا  $r = 1$  اور  $p \neq \pm 1$   
اگر  $r = 1$  رکھا جائے تو

$$\text{لوک } (2 \text{ رجم } \frac{1}{p} \text{ طہ}) = \text{رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{1}{p} \text{ طہ} = \text{رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots (13)$$

جہاں  $p \neq \pm 1$  کے درمیان واقع ہے اور  $p \neq \pm 1$  کے مساوی نہیں ہے  
اگر (۱۱) میں  $p$  کو  $2$  طہ میں تبدیل کیا جائے تو سلسلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک رجم طہ} = - \text{لوک } 2 + \text{رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر  $p \neq \pm 1$  کے درمیان واقع ہو۔  
پھر  $p$  کو  $\frac{1}{p}$  طہ میں تبدیل کرنے سے

(304)

$$\text{لوک رجم طہ} = - \text{لوک } 2 - \text{رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} - \frac{1}{p} \text{ رجم طہ} + \dots \dots \dots$$

جو درست رہتا ہے اگر  $p$  صفر اور  $p \neq \pm 1$  کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (۱۳) سے غیر متکسر کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اسوجہ سے  
کہ یہ سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستقر ہوتا ہے جبکہ  $p$  قیمت  $p$   
کے قریب آتا ہے، جب  $p = 1$  تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے



لیکن جب طہ ۱۱ سے خواہ کتنی ہی غیر مقدار کے کم ہوا اس سلسلہ کا مجموعہ  $\frac{1}{2}$  طہ ہوتا ہے۔

## گرگوری کا سلسلہ

۲۵۱۔ چونکہ لوک نو (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ جہاں طہ  $\pm 11$  کے درمیان واقع ہے اسلئے

لوک نو جم طہ + لوک نو (۱ + خ مس طہ) = خ طہ  
یا لوک نو جم طہ + خ (اس طہ -  $\frac{1}{2}$  مس<sup>۲</sup> طہ +  $\frac{1}{8}$  مس<sup>۳</sup> طہ - ...)  
+ ( $\frac{1}{2}$  مس<sup>۲</sup> طہ -  $\frac{1}{8}$  مس<sup>۳</sup> طہ + ...) = خ طہ

بشرطیکہ مس طہ  $\pm 1$  کے درمیان واقع ہو جو ہوگا اگر طہ  $\pm 11$  کے درمیان واقع ہو یا  $\pm \frac{1}{2}$  کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم طہ خفیت ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک نو جم طہ =  $\frac{1}{2}$  مس<sup>۲</sup> طہ +  $\frac{1}{8}$  مس<sup>۳</sup> طہ - ...  
اور طہ = مس طہ -  $\frac{1}{2}$  مس<sup>۲</sup> طہ +  $\frac{1}{8}$  مس<sup>۳</sup> طہ - ... (۱۴)

اس آخری سلسلے کو گرگوری کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ

درست رہتا ہے اگر طہ  $\pm \frac{1}{2}$  کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب طہ کو  $\frac{1}{2}$  - طہ میں بدلنے سے

$\frac{1}{2}$  - طہ = جم طہ -  $\frac{1}{2}$  جم<sup>۲</sup> طہ +  $\frac{1}{8}$  جم<sup>۳</sup> طہ - ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ  $\frac{1}{\pi}$  اور  $\frac{3}{\pi}$  کے درمیان واقع ہو۔  
کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملے ہیں

$$\text{طہ} = \pi n + \text{مس طہ} - \frac{1}{\pi} \text{مس}^2 \text{طہ} + \dots$$

$$\text{یا} \quad \text{طہ} = (\pi n + \frac{1}{\pi}) - \pi (\frac{1}{\pi} + \text{مم طہ} + \frac{1}{\pi} \text{مم}^2 \text{طہ} - \dots$$

جہاں سلسلہ اول میں  $n$  ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ  $-\pi n$ ،

$\pm \frac{1}{\pi}$  کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں  $n$  ایک  
صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ  $-\pi n$ ،  $\frac{1}{\pi}$  اور  $\frac{3}{\pi}$  کے درمیان واقع

ہے۔ گرگوری کے سلسلے کو شکل

$$\text{مس}^2 \text{لا} = \text{لا} - \frac{1}{\pi} \text{لا}^2 + \frac{1}{5} \text{لا}^3 - \dots$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں لا  $\pm 1$  کے درمیان واقع ہے اور  
مس<sup>2</sup> لا اپنی قدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب لا کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں مائل  
کیا جا چکا ہے اسکو گرگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جاسکتا ہے فرض کر  
طہ = جب<sup>2</sup> لا تو

$$\text{جب}^2 \text{لا} = \frac{\text{لا}}{\pi(\text{لا}-1)} - \frac{1}{\pi^3} \frac{\text{لا}^2}{\pi(\text{لا}-1)} + \frac{1}{5} \frac{\text{لا}^3}{\pi(\text{لا}-1)} - \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(1+r^2)\pi(\text{لا}-1)} \frac{1}{1+r^2} (1-r^2) +$$

اگر لا ایک سے کم ہو تو وہ سلسلہ جو

$$\frac{1}{1+r^2} \div \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے ماہل ہوتا ہے مطلقاً مستحق ہے اور سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots$$

مستحق ہے اگر  $|r| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ اس لئے ہم اس سلسلہ کو لا کی قوتوں میں

ترتیب دیکھتے ہیں۔ چنانچہ  $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$  کے سر کے لئے جملہ ملتا ہے

$$\left\{ \frac{1}{1+r^2} - \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{2 \times 2} + \dots + \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{2 \times 2} - \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{2 \times 2} \right\} \frac{1}{1+r^2}$$

خطوط معدانی } کے اندر کا جملہ  $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$  کے پھیلاؤ (ما کی قوتوں میں)

میں پہلے  $1+r^2$  ا سروں کا مجموعہ ہے اور یہ مجموعہ  $(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$  یا

$(1-r^2)^{\frac{1}{2}}$  میں  $1$  کے سر کے مساوی ہے اور یہ سر

$$\frac{1 \times \dots \times (3-r^2)(1-r^2)}{2 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2} (1-r^2)$$

کے مساوی ہے۔ پس جب  $1$  کے پھیلاؤ میں  $1+r^2$  کا سر ہے

$$\frac{1}{1+r^2} \div \frac{(1-r^2) \dots \times 5 \times 3 \times 1}{2 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2}$$

اس لئے

$$\dots + \frac{1}{1+r^2} \div \frac{(1-r^2) \dots \times 5 \times 3 \times 1}{2 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2} + \frac{1}{5 \times 3 \times 1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+r^2} + \dots$$

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ  $\pm \frac{1}{11}$  کے درمیان لاکی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ مجموعہ اسکے استدقاق کے دائرہ میں سلسلہ ہے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا  $\pm 1$  کے درمیان ہو۔

## دائرہ کی تربیع

۲۵۱ (۱)۔ وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the circle) کر نیکا ہے یعنی ایک مربع بنانیکا جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اس مسئلہ کے حاصل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دئے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقہ عمل جو اس مسئلہ عملی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدسی ہے جس میں صرف دائروں اور خطوط مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصول موضوعہ کی بموجب پہنچنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ عملی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ وہ ایک خط مستقیم کو جس کا طول عدد  $\pi$  سے تعبیر ہوتا ہے بنانیکا مسئلہ ہے جبکہ ایک دئے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی متصور ہو۔ لیڈبرٹ نے

۲۵۲ بات ثابت کی کہ عدد  $\pi$  غیر منطوق ہے یعنی اشکول  $\pi$  میں بیان نہیں

کیا جاسکتا جہاں  $\pi$  اور  $q$  صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفروض ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کر نیکے لئے کافی نہیں ہے کہ طول  $\pi$  کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطوق طول کے خطوط مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدسی طریقہ عمل سے حاصل کیا جاسکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی

اضافہ ہوا جبکہ لیویل ( Liouville ) نے علوی اعداد کے وجود کو ثابت کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری اعداد وہ ہست جو کسی درجہ ن کی ایک جبری مساوات کی ایک اہل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات کے سر منطبق عدد ہوں، مشککہ کی عمومیت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان سرورں پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہونی کی قید عائد کی جائے۔ علوی عدد وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سر منطبق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیویل نے علوی عددوں کی مثالیں دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم تحلیل میں بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد  $\sqrt{2}$  کی تھی جس کی علویت ہرمانٹ ( Hermite ) نے قائم کی۔ ہرمانٹ کے بعد لنڈی مینا ( Lindemann ) نے اس امر کا ثبوت دیا کہ  $\pi$  ایک علوی عدد ہے۔ اُس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر  $\alpha$  کو  $\beta$  یا تو یہ دو عدد لا اور  $\beta$  دونوں جبری نہیں ہو سکتے اِلا بصورت آنکہ  $\beta = \alpha$  یا  $\beta = 1$ ۔ وہ آسان ثبوت کہ  $\pi$  اور  $\pi$  علوی عدد ہیں بعد میں بلیرٹ، ہرورٹز ( Hurwitz ) اور گارڈن ( Gordan ) نے دئے۔

گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔ یہ ثبوت کہ  $\pi$  ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ ہمیں صرف خطوط مستقیم اور دائرے استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری تخنیوں کے ذریعہ ایسا کرنا ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ  $\pi$  کو کسی خاص

جبری مساوات کی ایک اہل کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جہاں یہ مساوات خطوط مستقیم اور دائروں یا دو سرے جبری تخیلوں کی کارٹریزی مساواتوں کی ترکیب دینے سے حاصل ہوئی ہے۔ دائرہ کو مربع میں تحلیل کر نیکاً مسئلہ ایسا ہے کہ جس نے صدیوں تک علماء ریاضی کے دماغوں کو محو فریب رکھا اور اسلئے لنڈرمن کا ثبوت اس مسئلہ کے عدم امکان کے متعلق اس لحاظ سے بری اہمیت رکھتا ہے کہ وہ تاریخی دلچسپی کے ایک مسئلہ سے متعلق ہے۔

۲۵۱ (ب) — یہ دکھانے کے لئے کہ عدد نو علوی ہے مان لو (بفرض امکان) کہ وہ اس شرط

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۰$$

کو پورا کرتا ہے جہاں '۱' '۱' ... مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں اور ۱۰ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اب یہ دکھانے کے لئے کہ اس مفروضہ سے ہم اس مسئلہ کے ضد پر پہنچتے ہیں یہ ثابت کیا جائیگا کہ ایک عدد گ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۰$$

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۰$$

جہاں '۱' '۱' '۱' ... مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور '۱' '۱' '۱' ... '۱' ان عددوں کو تعبیر کرتے ہیں

جو عدد ۱ ایک سے کم ہیں اور یہ کہ '۱' '۱' '۱' ... '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' = ۱۰  
عدد ۱ ایک سے کم ہے نیز '۱' '۱' '۱' ... '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' + '۱' = ۱۰



پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں۔  
رض کر دے کہ گ پ سے

$$\frac{10p + p - 1}{1} = 10x + 1$$

یا  $10p - 1 = 10x + 1$   $10p - 1 = 10x + 1$   $10p - 1 = 10x + 1$   
تعبیر ہوتا ہے، اس طرح گ پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ  $10p - 1$  پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ گ پ کی وہ قیمت جو مفرد عدد پ کی کافی طور پر پری قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد گ ہے۔ چونکہ گ پ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے گ پ کا ضعف نہیں ہے۔  
ہیں ماضی ہوتا ہے

$$\frac{10p + p - 1}{1} = 10x + 1$$

$$= \frac{10p + p - 1}{1} = 10x + 1$$

$$\left\{ \dots + \frac{10^{m+1}}{(2+m)(1+m)} + \frac{10^{m+1}}{1+m} + \dots \right\}$$

$$\dots + \frac{10^{m+1}}{(2+m)(1+m)} + \frac{10^{m+1}}{1+m}$$

$$\left\{ \dots + \frac{10^{m+1}}{1+m} + m + 1 \right\}$$





$$\frac{n-1}{n-1} \{ (n+1)(n+2) \dots (n+n) \} \{ |n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n| \}$$

$$+ \dots + \{ |n| + |n+1| + \dots + |n+n| \}$$

ایک سے کم ہے۔

پس ہیں حاصل ہوتا ہے کہ  $(|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|)$

+  $(|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|)$  تین عددوں کا مجموعہ ہے جنہیں سے ایک ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے اور یہ ناممکن ہے۔ پس چونکہ نو مساوات

$$|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n| = 0$$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر منطق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔  
۲۵۱ (ج) اگر  $\pi$  بغرض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سر منطق ہیں تو  $\pi$  بھی ایسی مساوات کی اصل ہو گا۔ مان لو کہ  $\pi$  مساوات

$$ج (|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|) = 0$$

کی ایک اصل ہے جسکے سر منطق ہیں اس طرح عددوں  $|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|$  میں سے ایک عدد  $\pi$  ہے۔

$$چونکہ  $\pi = 1 - 1$  اس لئے  $(|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|) = 0$$$

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$(|n| + |n+1| + |n+2| + \dots + |n+n|) = 0$$





$$\left\{ \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{1-p^3} + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{1-p^3} + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p^2} + \frac{1}{1-p^3} + \dots \right\}$$

فرض کر دو کہ پ کی اس قیمت کے جواب میں گ پ کی قیمت گ ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ گ (۱ + پ + پ<sup>۲</sup> + پ<sup>۳</sup> + ... + پ<sup>n</sup>) تین عددوں مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جن میں سے ایک 'پ کا ضعف ہے، دوسرا ایک صحیح عدد ہے پ سے ناقصیم پذیر، اور تیسرا ایک عدد ہے ایک سے کم، اس لئے یہ ناممکن ہے کہ مجموعہ محذوم ہو سکے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ π کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جسے سر صحیح عدد ہوں اور اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

(310)

## دائرہ کی تقریبی تربیع

۲۵۲۔ دائرہ کی تربیع کا مسئلہ جو π کی قیمت متعین کرنے کے مثل ہے تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک حل ہو سکتا ہے اگر ان متعدد سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ میں رقموں کی کافی تعداد لی جائے جو π کے لئے حاصل کئے جا چکے ہیں۔ سادہ ترین سلسلہ جو حاصل ہو سکتا ہے گریگوری کے سلسلہ میں ط = ۱/۲۲ رکھنے سے ملتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{1}{22} = \pi$$

لیکن یہ سلسلہ استفادہ مست رفقار سے مستحق ہوتا ہے کہ π کو محضاً کر کے لئے اسکا کوئی عملی فائدہ نہیں۔

۲۵۳۔ اگر ہم تہا لہ  $\frac{1}{n} = \pi$  سن  $\frac{1}{4} + \pi$  سن  $\frac{1}{5}$  استعمال کریں  
اور سن  $\frac{1}{4}$  سن  $\frac{1}{5}$  کی بجائے اکی قیمتیں گرہ گوری کے سلسلہ سے  
لیکھ دج کریں تو

$$\dots\dots + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{n}$$

$$\dots\dots + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} +$$

اس کو یو پر کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اسی تہا لہ سے ایک دوسرے سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر سن  $\frac{1}{4}$   
اور سن  $\frac{1}{5}$  کی بجائے ان کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں  
مائل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\left\{ \dots\dots + \left(\frac{2}{10}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{2}{10} = \pi$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \dots\dots + \left(\frac{2}{10}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{2}{10} = \pi$$

$$\left\{ \dots\dots + \left(\frac{1}{10}\right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{3}{10} +$$

۲۵۴۔ دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں  
نے استعمال کئے ہیں۔ کلاسن ( Clausen ) نے اپنا سلسلہ تہا لہ  
 $\frac{1}{n} = \pi$  سن  $\frac{1}{4}$  سن  $\frac{1}{5}$  سے گرہ گوری کا سلسلہ استعمال کر کے حاصل کیا مینن  
( Machin ) کا سلسلہ تہا لہ

$$\frac{1}{239} = \pi - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ دس (Dase) نے تیار کیا

$$\frac{1}{7} = \pi - \frac{1}{6} \text{ سن } + \frac{1}{5} \text{ سن } + \frac{1}{4} \text{ سن}$$

استعمال کی یمن کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل یوتھرفورڈ (Rutherford)

$$\frac{1}{99} = \pi - \frac{1}{5} \text{ سن } - \frac{1}{5} \text{ سن } + \frac{1}{4} \text{ سن } + \frac{1}{4} \text{ سن}$$

استعمال کی۔ ہٹن (Hutton) نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \frac{1}{10} \times \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 254 = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left( \frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \frac{2}{100} \times \frac{2}{3} + 1 \right\} 51 +$$

دیا جو لاسن لاکو  $\frac{2}{100}$  کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں

لا =  $\frac{1}{3}$  اور لا =  $\frac{1}{2}$  رکھنے اور کلاس کی تیار استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\left\{ \dots + \left( \frac{2}{100} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left( \frac{2}{100} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{28}{10} = \pi$$

$$\left\{ \dots + \left( \frac{144}{100000} \right) \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \left( \frac{144}{100000} \right) \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{30334}{100000} +$$

دیا ہے جو تماثلہ

$$\pi = 20 \text{ سن } \frac{1}{2} + 8 \text{ سن } \frac{1}{4}$$

سے اخذ ہو سکتا ہے۔

ڈبلیو شہانگس (W. Shanks) نے  $\pi$  کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰ مقامات تک محسوب کی ہے۔

لارڈ براونکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1+4} + \dots = \pi$$

یہ کسر معمولی قاعدے سے گرگوری کے سلسلہ  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔ سٹرن (Stern) نے سلسلہ کسر

$$\frac{1}{4} = \pi = 1 + \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1+4} + \dots$$

دائرہ کی تربیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا اشاعت نہم میں مقالہ "Squaring of the circle" میں لیا گیا۔  
نیز کچھ شیشو کا قالہ 1680-1683 On the quadrature of the circle یہ عجیب و غریب

میتھا ٹیکس جلد سوم میں۔

## مثلثی تماثلات

۲۵۵ - دفعہ ۱۹۰ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ مقدار  
'ا' 'ب' 'ج' .... کی کسی تعداد کے درمیان کسی تماثل جبری رشتہ  
ف (ا' 'ب' 'ج' ....) سے دو متناظر مثلثی تماثلات اخذ ہو سکتی ہیں





یا =  $\frac{\text{جب (ط - ہ) جب (ط - ج)}}{\text{جب (ع - ہ) جب (ع - ج)}}$  {جم ۲ (ط - ع) + خ جب ۲ (ط - ع)}  
 پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستحیل کرنے اور خ کے سر کو منفر کے مساوی رکھنے سے  
 ثابت شدنی متناظرہ حاصل ہوتی ہے۔

## سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶ — جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

$$۱ + \text{جم ع} + ۱ + \text{جم (ع + ط)} + ۱ + \text{جم (ع + ط + ۲ ط)} + \dots$$

$$۱ + \text{جب ع} + ۱ + \text{لاب (ع + ط)} + ۱ + \text{لاب (ع + ط + ۲ ط)} + \dots$$

کے مجموعے میں، اور میں، اخذ ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو ف (لا) = } ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$\text{تو } \text{خو ص ف (لا خو ط)} = \text{س} + \text{خ میں}$$

$$\text{اوزیر } \text{خو ص ف (لا خو ط)} = \text{س} - \text{خ میں}$$

$$\text{اسکے میں } = \frac{۱}{۲} \{ \text{خو ص ف (لا خو ط)} + \text{خو ص ف (لا خو ط)} \}$$

$$\text{اور میں } = \frac{۱}{۲} \{ \text{خو ص ف (لا خو ط)} - \text{خو ص ف (لا خو ط)} \}$$



$$\frac{1}{2} \times \frac{\text{خو}^2 (1 - \text{لا خو}^2) (\text{لا خو}^2 - \text{خو}^2) + \text{خو}^2 (1 - \text{لا خو}^2) (\text{لا خو}^2 - \text{خو}^2)}{(1 - \text{لا خو}^2) (\text{لا خو}^2 - \text{خو}^2)}$$

$$\text{جو} = \frac{\text{جم} - \text{لا جم} (\text{ع} - \text{ب}) - \text{لا جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \text{لا جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ا} - \text{ب})}{\text{جم} - \text{لا جم} (\text{ع} - \text{ب}) - \text{لا جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \text{لا جم} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ا} - \text{ب})}$$

$$1 - 2 \text{لا جم} = \text{لا}^2$$

(۲) جمع کرو لاتنا ہی سلسلہ

$$\frac{\text{لا جب} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب})}{\text{ن}} + \dots + \frac{\text{لا جب} (\text{ع} + 2 - \text{ب})}{2} + \text{لا جب} (\text{ع} + \text{ب} - \text{ب})$$

$$\text{اب } \text{خو}^2 = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \dots + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}} + \dots$$

اسیں لاکھ بجائے لا خو<sup>۲</sup> رکھو اور خو<sup>۲</sup> سے ضرب دو تو

$$\text{لا خو}^2 + \text{خو}^2 = \text{خو}^2 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \dots + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}} + \dots + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \dots$$

اور اسی طرح

$$\text{لا خو}^2 + \text{خو}^2 = \text{خو}^2 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \dots + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}} + \dots + \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}} (\text{ع} + \text{ن} - \text{ب}) + \dots$$

پس دیکھتے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} \times \{ \text{لا خو}^2 + \text{خو}^2 - \text{لا خو}^2 - \text{خو}^2 \}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{لا جم} = \frac{1}{2} \times \{ \text{خو}^2 (\text{لا جب} + \text{ع} - \text{ب}) - \text{خو}^2 (\text{لا جب} + \text{ع} - \text{ب}) \}$$

$$\text{جو} = \text{لا جم} = \text{جب} (\text{ع} + \text{لا جب} - \text{ب})$$

۲۵۷۔ اب ہم چند مثالیں دینگے جن سے یہ معلوم ہو گا کہ دائری قوت ثانی قوت ثانی پہلے کس طرح جلوں کو سلسلوں میں پھیلانے میں کام آتے ہیں۔  
(۱) (۱-۲ لاجم طہ + لا<sup>۱</sup>) کو لاک کی قوتوں کے ایک سلسلے

میں پھیلاتا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ اب

$$(۱-۲ لاجم طہ + لا<sup>۱</sup>) = (۱- لا<sup>خط</sup> طہ) (۱- لا<sup>قوت</sup> طہ)$$

اسکو جزوی کسرات میں بیان کرنے سے وہ

$$= \frac{۱}{۲ جب طہ} \left( \frac{لا<sup>خط</sup> طہ}{۱- لا<sup>قوت</sup> طہ} - \frac{لا<sup>قوت</sup> طہ}{۱- لا<sup>خط</sup> طہ} \right)$$

اور ہر کسر کو لاک کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲ جب طہ} (لا<sup>خط</sup> طہ + لا<sup>قوت</sup> طہ + لا<sup>خط</sup> طہ + لا<sup>قوت</sup> طہ + ... + لا<sup>قوت</sup> طہ + لا<sup>خط</sup> طہ)$$

$$= \frac{۱}{۲ جب طہ} (لا<sup>خط</sup> طہ + لا<sup>قوت</sup> طہ + لا<sup>خط</sup> طہ + لا<sup>قوت</sup> طہ + ... + لا<sup>قوت</sup> طہ + لا<sup>خط</sup> طہ)$$

جو = قہ طہ (جب طہ + لاجب طہ + لاجب طہ + لاجب طہ + ... + لا<sup>قوت</sup> جب طہ + لا<sup>خط</sup> جب طہ)  
اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$۱-۲ لاجم طہ + لا<sup>۱</sup> = ۱ + ۲ لاجم طہ + ۲ لاجم طہ + ... + ۲ لاجم طہ + لا<sup>قوت</sup> جب طہ + لا<sup>خط</sup> جب طہ$$

(۲) لوک (۱+۲ لاجم طہ + لا<sup>۱</sup>) کو لاک کی قوتوں میں پھیلاتا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ چونکہ

$$لوک (۱+۲ لاجم طہ + لا<sup>۱</sup>) = لوک (۱+ لا<sup>قوت</sup> طہ) + لوک (۱+ لا<sup>خط</sup> طہ)$$

اسے بائیں جانب کے ہر لوکار تم کو پھیلانے سے دفعہ ۲۵۰ کا مضابطہ  
(۹) مائل ہوتا ہے۔

(۳) تو<sup>۱</sup> جب (ب + لا + ج) کو پھیلانے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \times \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

اب اگر ہم تو<sup>۱</sup> (ب + لا + ج) کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو لا<sup>۱</sup>  
کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

فرض کرو کہ  $\frac{1}{2} = \text{مس}$  تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

پس یہ جملہ مطلوب پھیلاؤ میں لا<sup>۱</sup> کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + ع) تو لا کون  
کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں  $n > 1$ ۔

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{خج} \\ \text{تو} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 + \text{خج}) \\ (1 - \text{خج}) \end{array} \begin{array}{l} \text{لا} \\ \text{تو} \end{array}$$

$$\text{اسلئے } \frac{2 \text{ خلا } 1 - \text{ن تو } 2}{1 - \text{ن تو } 2} =$$

لو کار تم لینے اور بائیں جانب کو پھیلانے سے

$$2 \text{ خلا } 1 = \text{ن} (\text{تو } 2 - \text{تو } 2) + \frac{1}{4} (\text{تو } 2 - \text{تو } 2) + \dots$$

$$\text{پس } 1 \text{ خلا } 2 = \text{ن جب } 2 + \frac{1}{4} \text{ن جب } 2 + \frac{1}{16} \text{ن جب } 2 + \dots$$

جہاں کہ ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ا سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو  $\frac{1}{2}$  کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب } 2 = \frac{1}{2} \text{ جب } (2 + 2)$$

$$\text{اسلئے } 2 = \frac{1}{2} \text{ جب } 2 + \frac{1}{4} \text{ جب } 2 + \frac{1}{16} \text{ جب } 2 + \dots$$

کیونکہ اس صورت میں ک =۔

## پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1 + 2 \text{ بی}}{1 - 2 \text{ بی}}$  کے پھیلاؤ میں جبکہ مکوی کی قوتوں میں پھیلاؤ جائے عام رقم ہے

$$\frac{(1 + 2 \text{ بی}) + 2 \text{ بی جب } 2}{2 \text{ بی جب } 2}$$

اور  $\frac{(۱+بی)}{(۱-بی)}$  کے پھیلاؤ میں مام رقم ہے

$$\frac{(۳+ن) جب (۱+ن) فہ - (۱+ن) جب (۳+ن) فہ}{۴ جب ۳ فہ}$$

$$+ \frac{(۲+ن) جب ۳ فہ - ۳ جب (۲+ن) فہ}{۴ جب ۳ فہ}$$

(یولس)

16)

$$۲- اگر مس لا = \frac{ن جب ۳}{۱-ن جب ۳} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$لا = ن جب ۳ + \frac{۱}{۴} ن جب ۲ + \frac{۱}{۱۶} ن جب ۱$$

جبکہ ن ایک سے کم ہے۔

$$۳- اگر مم ما = مم لا + مم ۳ فہ لا تو ثابت کرو کہ$$

$$۱ = جب لا جب ۳ - \frac{۱}{۴} جب ۲ لا جب ۳ + \frac{۱}{۱۶} جب ۱ لا جب ۳$$

$$۴- اگر مس ۱ ط = \left( \frac{۱+۱}{۱-۱} \right) مس ۱ فہ تو ثابت کرو کہ$$

$$ط = فہ + ۲ لا جب فہ + \frac{۲}{۴} لا جب ۲ فہ + \frac{۲}{۱۶} لا جب ۳ فہ + \dots$$

$$۱ = \frac{۱}{۴} + \left( \frac{۱}{۴} \right) ۲ + \left( \frac{۱}{۴} \right) ۲ + \left( \frac{۱}{۴} \right) ۲ + \dots$$

جہاں

$$۵- اگر مس ط = لا + مس ۳ فہ تو ثابت کرو کہ$$

$$ط = ۳ فہ + لا جب ۳ - \frac{۱}{۴} لا جب ۲ - \frac{۱}{۱۶} لا جب ۱$$

$$+ \frac{۱}{۱۶} لا جب ۳ + \dots$$



۶۔ اگر  $(م+۱) مس ط = (۱-م) مس ف$  جبکہ  $ط$  اور  $ف$  مثبت  
حادثہ زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ط = ف - م جب ۲ ف + \frac{۱}{۲} م جب ۴ ف - \frac{۱}{۳} م جب ۶ ف + \dots$$

۷۔ اگر  $مس ع = جم ۲$  سے  $مس ل$  تو ثابت کرو کہ  
ل۔ ع = مس ا سے جب ۲ ع + \frac{۱}{۲} مس ا سے جب ۴ ع + \frac{۱}{۳} مس ا سے جب ۶ ع + \dots

۸۔ اگر جب لا = ن جم (لا+ع) تو لا کون کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ

۹۔ ثابت کرو کہ (۱-۲ لا جم ط + لا) کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

۲ { پ جم پ ط + پ - ۱ جم (پ-۲) ط + پ - ۲ جم (پ-۳) ط + ... }  
جہاں 'م' (۱-لا) کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے۔

$$۱۰۔ ثابت کرو کہ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}}{2+n} = ۱۸ = \frac{۲}{۱۱}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

لوک ج = لوک ا - \frac{۱}{۲} جم ج - \frac{۱}{۲} جم ج - \frac{۱}{۳} جم ج - \dots  
یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب، ا سے کم ہے۔

۱۲۔ اگر مساوات ۱ لا + ب لا + ج = کی اصلیں خیالی ہوں تو

ثابت کرو کہ (۱ لا + ب لا + ج) کے پھیلاؤ میں لا کا سر ہے

$$\frac{\frac{n}{2} جب (۱+n) ط}{ج + \frac{۱}{۲} + جب ط}$$









۳۶ - کسی شلت میں اگر  $\frac{1}{2}$  ج توثابت کروکہ

$$\text{جم } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \text{ جم } 1 + \frac{1}{2} \text{ جم } 2 + \frac{1}{2} \text{ جم } 3 + \dots \right\}$$

$$\left\{ \dots + \frac{1}{2} \text{ جم } 3 + \frac{1}{2} \text{ جم } 4 + \frac{1}{2} \text{ جم } 5 + \dots \right\}$$

(۹۱۹)

۳۷ - ثبات کروکہ

$$(\text{مس } 1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

$$= \frac{(1-1)^{\infty}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

جہاں  $1 \pm 1$  کے درمیان واقع ہے۔

$$38 - \text{اگر } 6 = \text{لوکوس } \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\text{توثابت کروکہ } 1 = 6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$39 - \text{مس } \left\{ \text{خرج لوک } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \right\} \text{ کو منطبق بناؤ۔}$$

۴۰ - ثبات کروکہ

$$\frac{\text{جم } 1}{1-1} + \frac{\text{جم } 2}{2-1} + \frac{\text{جم } 3}{3-1} + \dots + \frac{\text{جم } n}{n-1}$$

$$= \frac{1}{(1-1)^2} - \frac{(1-1)^{\infty}}{1-1} = \frac{1}{0} - \frac{0}{0}$$

۴۱ - اگر  $n$  ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

$$\text{مس} = 1 + \text{ن جم طه} + \dots + \frac{\text{ن} - 1 + \text{ن}}{\text{ن} - 1} \text{جم طه} + \dots + \text{طه} + \dots$$

تو ثابت کرد که

$$2 \text{ مس جب طه} = \{1 - (1 - \frac{1}{2})\} \text{جم ن طه} + \{1 - (1 - \frac{1}{3})\} \text{جم ن طه} + \dots + \frac{1}{\text{ن}} \text{جم ن طه}$$

۴۲ - ثابت کرد که مس مس مس ... مس لا (ن ماسون تک) کاپیلا و

$$\text{لا} + \text{ن} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} (1 - \text{ن}) + \frac{1}{7} (1 - \text{ن}) + \dots + \frac{1}{\text{ن}} (1 - \text{ن}) \right] + \dots$$

۴۳ - اگر مس (په - فه) = مس ۳ په تو ثابت کرد که

$$\text{فه} = \frac{1}{3 \times 1} \text{جب عه} - \frac{1}{3 \times 2} \text{جب ۲ عه} + \frac{1}{3 \times 3} \text{جب ۳ عه} - \dots$$

۴۴ - اگر مس ط > ۱ تو ثابت کرد که

$$\text{مس ط} - \frac{1}{2} \text{مس طه} + \frac{1}{3} \text{مس طه} - \dots = \text{جب ط} + \frac{1}{2} \text{جب طه} + \frac{1}{3} \text{جب طه} + \dots$$

۴۵ - ثابت کرد که

$$1 + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن})}{3} + \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (2 - \text{ن}) (3 - \text{ن}) (4 - \text{ن})}{24} + \dots$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \left\{ 2 + (1 - \frac{1}{2}) \text{جم} 2 \times \frac{\text{ن}^2}{3} \right\}$$

۴۶ - ثابت کرد که مساواتیں

لاجب ۲ عه + لاجب ۲ به + ی لاجب ۲ ج - ۲ مای جب (به + ج) - ۲ ی لاجب (ج + ع)

- ۲ لا لاجب (ع + به) = ۰

لاجم ۲ عه + لاجم ۲ به + ی لاجم ۲ ج - ۲ مای جم (به + ج) - ۲ ی لاجم (ج + ع)

- ۲ لا لاجم (ع + به) = ۰

جب ذیل قیمتوں کے جٹوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

$$\text{لا: ما: ی} = \text{جب}^1 \frac{1}{p} (\text{بہ-جہ}) : \text{جب}^2 \frac{1}{p} (\text{جہ-عہ}) : \text{جب}^3 \frac{1}{p} (\text{عہ-بہ})$$

$$\text{یا} = \text{جب}^1 \frac{1}{p} (\text{بہ-جہ}) : \text{جب}^2 \frac{1}{p} (\text{جہ-عہ}) : \text{جب}^3 \frac{1}{p} (\text{عہ-بہ})$$

$$\text{یا} = \text{جب}^1 \frac{1}{p} (\text{بہ-جہ}) : \text{جب}^2 \frac{1}{p} (\text{جہ-عہ}) : \text{جب}^3 \frac{1}{p} (\text{عہ-بہ})$$

$$\text{یا} = \text{جب}^1 \frac{1}{p} (\text{بہ-جہ}) : \text{جب}^2 \frac{1}{p} (\text{جہ-عہ}) : \text{جب}^3 \frac{1}{p} (\text{عہ-بہ})$$

۴۷ - اگر ط کی مختلف قیمتیں ط<sup>۱</sup>، ط<sup>۲</sup>، ط<sup>۳</sup>، ط<sup>۴</sup> ہوں جو ط (320)

۱۔ جب ۲ ط + ب جب ۲ ط + ج جب ۲ ط + د جب ۲ ط + ع  
کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{جب}^1 \text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب}^2 \text{س}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}^3 \text{س}} = \frac{\text{د}}{\text{جب}^4 \text{س}} = \frac{\text{ع}}{\text{جب}^5 \text{س}}$$

جہاں ۲ س = ط<sup>۱</sup> + ط<sup>۲</sup> + ط<sup>۳</sup> + ط<sup>۴</sup> + ط<sup>۵</sup>

۴۸ - ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} = ۱ - \frac{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ن}}{\text{س}} - \frac{\text{ن}}{\text{س}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ن}}{\text{س}} - \frac{\text{ن}}{\text{س}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} \dots (ن \text{ جفت})$$

$$(۱) \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{ن}}{\text{س}} - \frac{\text{ن}}{\text{س}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} - \frac{\text{ن}}{\text{س}} + \frac{\text{ن}}{\text{س}} \dots (ن \text{ طاق})$$

۴۹ - اگر جب<sup>۱</sup> لا = لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + ... تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۴ + \dots$$

کا مجموعہ  $\frac{1}{\text{س}} \{ \text{جب}^1 (\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ + \dots) + \text{جب}^2 \text{لا}^۱ \}$  ہے۔

۵۰ - اگر مساوات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + ... = بن کی لیا ملیں  
تو ثابت کرو کہ



$$\text{مس}^1 = \frac{\text{جیب ط}^1}{\text{جیب ط}^1 - \text{لا}} + \frac{\text{مس}^1}{\text{جیب ط}^1 - \text{لا}} + \dots$$

$$= \frac{\text{مس}^1 + \text{جیب ط}^1 \times \text{لا}^1 + \text{جیب ط}^2 \times \text{لا}^2 + \dots + \text{جیب ط}^n \times \text{لا}^n}{\text{لا}^1 + \text{جیب ط}^1 \times \text{لا}^1 + \text{جیب ط}^2 \times \text{لا}^2 + \dots + \text{جیب ط}^n \times \text{لا}^n}$$

۵۱ - اگر (۱-ج) مس ط = (۱+ج) مس ذ تو سلسلوں

$$\text{جیب ط}^2 - \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \dots$$

$$\text{جیب ط}^2 + \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \dots$$

میں سے ہر ایک ط - ذ کے مساوی ہے جہاں ط اور ذ ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں اور ج > ۱ -

۵۲ - ثابت کرو کہ

$$\text{جیب ط}^1 + \frac{1}{\text{جیب ط}^1} + \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \frac{1}{\text{جیب ط}^3} + \dots = \infty$$

۵۳ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{جیب ط}^1 + \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \frac{1}{\text{جیب ط}^3} + \frac{1}{\text{جیب ط}^4} + \dots$$

سب ذیلی قسٹیں اختیار کرتا ہے

$$(۱) \text{جیب}^1 (\text{جیب}^1 - \text{لا}^1) \text{جیب}^1 \text{ لایک } \pi < \text{لا} < \pi$$

$$(۲) \text{جیب}^1 (\text{جیب}^1 + \text{لا}^1) \text{جیب}^1 \text{ لایک } \pi < \text{لا} < \pi$$

$$۵۴ - \text{اگر ج} = \text{جیب ط}^1 - \frac{1}{\text{جیب ط}^2} + \frac{1}{\text{جیب ط}^3} + \dots$$

تو ثابت کرو کہ مس ۲ = جیب ط

۵۵ - ثابت کرو کہ

$$\text{جیب}^1 (\text{جیب}^1 + \text{لا}^1) + \text{جیب}^2 (\text{جیب}^2 + \text{لا}^2) + \dots = \infty$$

اگر ج = ۱ -

۵۶ - ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{1}{p} \times \text{جب } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \times \text{جب } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جب } \frac{1}{q} + \dots$$

$$= \text{جم } (1 + \text{مم } \frac{1}{p} + \text{مم } \frac{1}{q})$$

(72)

۵۷ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک (قم } \frac{1}{p} = 2 \times \text{جم } \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \times \text{جب } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \times \text{جب } \frac{1}{q} + \dots)$$

۵۸ - ثابت کرو کہ

$$\text{جم } (1 - \frac{1}{p}) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} + \dots$$

۵۹ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \dots$$

ہے جہاں  $\frac{1}{p} \pm \frac{1}{q}$  کے درمیان مانع ہے۔

مثلاً ذیل کے لائنہائی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

$$1 - \text{جم } \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} - \dots$$

$$1 - \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} - \dots$$

$$1 - \text{جم } \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \dots$$

$$1 - \text{جم } \frac{1}{p} + \text{جم } \frac{1}{p} + \text{جم } \frac{1}{p} + \text{جم } \frac{1}{p} + \dots$$

$$+ \frac{1}{p} \times \text{جم } \frac{1}{q} + \dots$$

$$۶۴- \text{جب } ط - \frac{۱}{۳} \text{ جب } ط + \frac{۱}{۵} \text{ جب } ط - \dots$$

$$۶۵- \frac{\text{جم } ط}{۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{\text{جم } ط}{۴ \times ۳ \times ۲} + \frac{\text{جم } ط}{۵ \times ۴ \times ۳} + \dots$$

$$۶۶- \text{جم } ط + \frac{\text{جم } (ط + ۲)}{۳} + \frac{\text{جم } (ط + ۴)}{۵} + \dots$$

$$۶۷- \text{جم } ط \text{ جم } ز - \frac{۱}{۴} \text{ جم } ط \text{ جم } ز + \frac{۱}{۳} \text{ جم } ط \text{ جم } ز - \dots$$

$$۶۸- \text{مس } ط \text{ جب } ط + \frac{\text{مس } ط \text{ جب } ط}{۲} + \frac{\text{مس } ط \text{ جب } ط}{۳} + \dots$$

$$۶۹- ۱ + \frac{\text{جم } ط}{۲} + \frac{\text{جم } (ط + ۲)}{۳} + \frac{\text{جم } (ط + ۴)}{۵} + \dots$$

$$۷۰- \text{جب } ط \times \text{جب } ط - \frac{۱}{۴} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط + \frac{۱}{۳} \text{ جب } ط \times \text{جب } ط - \dots$$

$$۷۱- \text{م } جب ط - \frac{۱}{۴} \text{ م } جب ط + \frac{۱}{۳} \text{ م } جب ط - \dots$$

$$۱ > ۱$$

# سولہواں باب

## زائدی تفاعلات

(322)

۲۵۸۔ زائدی جیب التمام، جیب، ماس، ... کی تعریف پندرہویں

باب میں مساواتوں

جزء =  $\frac{1}{4}$  (قو + قو) ، جزء =  $\frac{1}{4}$  (قو - قو) ، مسرع = جزء ، مجزء

مجزء =  $\frac{1}{4}$  مسرع ، قطر =  $\frac{1}{4}$  جزء ، قمر =  $\frac{1}{4}$  جزء ، ایل جزء کے ذریعہ ہو چکی ہے جہاں قوت نا قو اپنی صدر قیثیں رکھتے ہیں یہ زائدی تفاعل، جزء کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں حسب ذیل مساواتوں کے ذریعہ بیان ہوتے ہیں:-

جزء = جم جزء = جب جزء = مسرع = مس جزء = خ مس جزء  
مجزء = خ مم جزء = قطر = قمر = خ قم جزء

## زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۵۹۔ زائدی تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتے تعریفوں سے فوراً حاصل ہوتے ہیں:-

مجزء = جزء = ۱ ..... (۱)

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \text{سنزء} + \text{قطرء}$$

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \text{مقرء} + \text{مقرء}$$

یہ رشتے دائری تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتوں

$$\text{جم}^۲\text{ط} + \text{جب}^۲\text{ط} = ۱, \text{قط}^۲\text{ط} - \text{مس}^۲\text{ط} = ۱, \text{قم}^۲\text{ط} - \text{مم}^۲\text{ط} = ۱$$

کے جواب میں ہیں اور انہیں  $\text{ط} = \text{خرع}$  رکھنے سے فوراً اخذ ہوتے ہیں رشتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اور زائدی تفاعلوں کی تعریفوں کی مدد سے کسی بھی زائدی تفاعل کو کسی دوسرے زائدی تفاعل کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نتائج حسب ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔

(323)

جزء = لا	جزء = لا	سنزء = لا	مقرء = لا	مقرء = لا	قطرء = لا
لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$
جزء = لا	لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$
سنزء = لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$
مقرء = لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$
قطرء = لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$
مقرء = لا	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \text{ط}}}$	لا

## جمع کے ضابطے

۲۶۰۔ چونکہ  $\text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶)$   
 پس  $\text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶)$   
 اسی طرح  $\text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶)$   
 یہ زائدی جیب التام اور جیب کے لئے جمع کے ضابطے ہیں، بلاشبہ انکی  
 تصدیق ان تفاعلوں کی قوت نامیوں کو درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔  
 (۴) اور (۵) سے ہم اند کرتے ہیں

$$\text{سنر}(\pm ۶) = \frac{\text{سنر}(\pm ۶) \pm \text{سنر}(\pm ۶)}{\pm \text{سنر}(\pm ۶) \pm \text{سنر}(\pm ۶)} \dots (۶)$$

$$\text{منر}(\pm ۶) = \frac{\text{منر}(\pm ۶) \pm \text{منر}(\pm ۶)}{\pm \text{منر}(\pm ۶) \pm \text{منر}(\pm ۶)} \dots (۷)$$

۲۶۱۔ چونکہ  $\text{جز}(\pm ۶) + \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶)$

$$\text{جز}(\pm ۶) - \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶)$$

$$\text{جز}(\pm ۶) + \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶)$$

$$\text{جز}(\pm ۶) - \text{جز}(\pm ۶) = \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶)$$

اور

اسلئے 'و' کو علی الترتیب  $\frac{1}{4}(\pm ۶)$ ،  $\frac{1}{4}(\pm ۶)$  میں بدلنے سے (824)

حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جز}(\pm ۶) + \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶) \cdot \frac{1}{4}(\pm ۶) \\ \text{جز}(\pm ۶) - \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶) \cdot \frac{1}{4}(\pm ۶) \\ \text{جز}(\pm ۶) + \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶) \cdot \frac{1}{4}(\pm ۶) \\ \text{جز}(\pm ۶) - \text{جز}(\pm ۶) = ۲ \text{ جز}(\pm ۶) \cdot \frac{1}{4}(\pm ۶) \end{array} \right. \dots (۸)$$

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب التمام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کے لیے ہیں۔

## ضعفوں یا تحت ضعفوں کیلئے ضابطے

۲۶۲۔ دائری تقاطعوں کے ضابطوں کے جواب میں ضعفوں یا تحت ضعفوں کے زائدی تقاطعوں کے درمیان مماثل رشتے ضابطوں (۴) (۵) (۶) اور (۸) سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جزء } ۶۲ = ۲ \text{ جزء } ۶ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{جزء } ۶۲ = \text{جزء } ۶ + \text{جزء } ۶ = ۲ \text{ جزء } ۶ - ۱ = ۱ + ۲ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{مسز } ۶۲ = \frac{۲ \text{ مسز } ۶}{۱ + \text{مسز } ۶} \text{ جزء } ۶۳ = ۳ \text{ جزء } ۶ + ۴ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{جزء } ۶۳ = ۲ \text{ جزء } ۶ - ۳ \text{ جزء } ۶$$

$$\text{مسز } ۶۳ = \frac{۳ \text{ مسز } ۶ + \text{مسز } ۶}{۳ + ۱ \text{ مسز } ۶} \text{ جزء } ۶۴ = \frac{۱ + \text{جزء } ۶}{۲}$$

$$\text{جزء } ۶۴ = \frac{۱ - \text{جزء } ۶}{۲} \text{ مسز } ۶۴ = \frac{۱ - \text{جزء } ۶}{۱ + \text{جزء } ۶} = \frac{\text{جزء } ۶}{۱ + \text{جزء } ۶}$$

## زائدی تقاطعوں کے لئے سلسلے

۲۶۳۔ چونکہ  $\text{قو} = \text{جزء } ۶ + \text{جزء } ۶$ ،  $\text{قو} = \text{جزء } ۶ - \text{جزء } ۶$  اس لئے جزء ۶، جزء ۶ کے لئے سلسلے ۶ کی قوتوں میں یہ ہیں

$$\text{جزء } ۶ = ۱ + \frac{۶}{۲} + \frac{۶}{۲} + \dots + \frac{۶}{۲} + \frac{۶}{۲} + \dots$$

دفعہ ۲۳۳ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ جزء ۶ = ۱ + ۶، جزء ۶ = ۱ - ۶

جہاں

$$|ب| > \frac{1}{4} |ا| \text{ ' } |س| > \frac{1}{4} |ا| \text{ ' } |و|$$

(336)

نیز (جزء ± جزء) کی صدر قیمت ہمیشہ ہے

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تفاعلوں کے لئے 'ڈیموآٹر' کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

$$\text{جزء م} = \frac{1}{4} \{ (\text{جزء} + \text{جزء}) + (\text{جزء} - \text{جزء}) \}$$

$$\text{جزء م} = \frac{1}{4} \{ (\text{جزء} + \text{جزء}) - (\text{جزء} - \text{جزء}) \}$$

۲۶۲۔ ان آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جزء م} = \text{جزء}^۱ + \frac{\text{جزء}^۲ (۱ - \text{جزء}^۱)}{۳} + \frac{\text{جزء}^۳ (۲ - \text{جزء}^۱)}{۳} + \dots$$

$$\text{جزء م} = \text{جزء} + \frac{\text{جزء}^۲ (۱ - \text{جزء}^۱)}{۱} + \frac{\text{جزء}^۳ (۲ - \text{جزء}^۱)}{۲} + \frac{\text{جزء}^۴ (۳ - \text{جزء}^۱)}{۳} + \dots$$

$$\times \text{جزء}^۴ + \dots$$

دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جزء م کے پھیلاؤ، جزء کی قوتوں میں حاصل کئے جاسکتے ہیں؛ لیکن مختلف سروں کو اکٹھا کر نیکے کام کو دہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۴ پر دہریوں باب کے ضابطہ میں طہ کی بجائے جزء درج کر کے نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{جزء م} = \text{جزء} + \frac{\text{جزء}^۲ (۱ - \text{جزء}^۱)}{۳} + \frac{\text{جزء}^۳ (۲ - \text{جزء}^۱)}{۳} + \dots$$



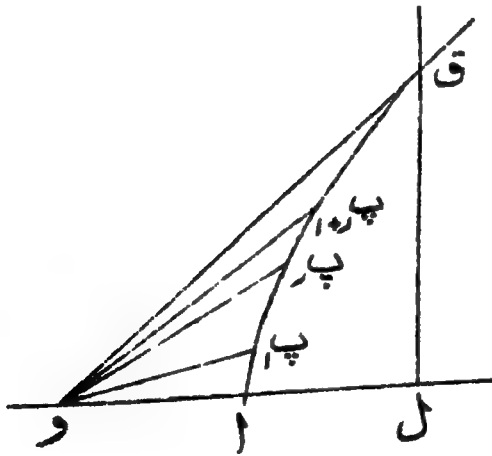




کثیر الاضلاع اپ اپ پ پ پ.... پ پ... پ پ... ق بناتے ہیں  
اور رقبہ وراق کے ناپ کی تعریف جو و ا و ق اور قوس ا ق ی  
محدود ہے اس طرح کرتے ہیں کہ وہ بند کثیر الاضلاع و اپ پ پ پ... پ پ... ق ی و  
کے رقبہ کے ناپ کی انتہا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو جبکہ اندرونی کثیر الاضلاع

(927)

کے ضلعوں کی تعدا وغیرہ یقین طور پر اس طرح بڑھائی جائے کہ بڑے سے  
بڑے ضلع کی انتہا صفر کی طرف مستند ہو بشرطیکہ یہ انتہا مقررہ شرط کے  
تحت کثیر الاضلاعوں کے تمام تواتروں کے لئے ایک یگانہ قیمت رکھے۔  
فرض کرو کہ نقطہ پ پ کے جواب میں ع کی قیمت ع رہے اور فرض کرو کہ  
زاد یہ پ پ و ا کے دائری ناپ کو طرہ بقیہ کرتا ہے، فرض کرو کہ نقطہ  
ق کے جواب میں یہ مقداریں ع اور ط ہیں۔



مس طرہ = مسرعر، اسلئے

$$\text{جب طرہ} = \frac{\text{بجز عر}}{\text{ع}} \text{، اور حجم طرہ} = \frac{\text{بجز عر}}{\text{ع}} \text{ (بجز عر)}$$



جو  $\frac{1}{2}$  جبر  $(ع + ع + ۱)$  جبر  $\frac{1}{4}$   $(ع + ۱ - ع)$   
نیز  $ع + ۱ - ع >$  جبر  $(ع + ۱ - ع)$  اسلئے نسبت  $(ع + ۱ - ع)$  پُر ہے

$>$   $\frac{1}{4}$  جبر  $(ع + ۱ - ع)$   $\frac{1}{4}$  جبر  $(ع + ۱ - ع)$   $>$   $\frac{1}{4}$  جبر  $\frac{1}{4}$  ع  
اب چونکہ  $(ع + ۱ - ع)$  پُر ہے ایک مستقل عدد سے جو ر پر اور کسی مخصوص  
کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں  
کے کسی توازن کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں  $ع + ۱ - ع$  میں سے  
بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا  
بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستقیم ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض  
کر سکتے ہیں

ر کی تمام قیمتوں کے لئے، جہاں کہ  $ع + ۱ - ع >$  کہ  
جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پر بڑھاؤ جاتی ہے۔  
اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) (ع + ۱ - ع)$$

یا  
سے استقدر کم فرق رکھتا ہے جو

$$\frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) (ع + ۱ - ع)$$

یا  
 $\frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) (ع + ۱ - ع)$

سے کم ہے اور یہ کہ کے ساتھ صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔ پس

یہ ثابت ہو چکا کہ مقدمہ شرط کے تحت کسی تو اتر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے  
رقبوں کے ناب کی یگانہ نہ تھا  $\frac{1}{2}$  وء ہے۔ اسلئے قطاع و اق کا رقبہ وء  
وقف اور قائم الزاویہ زائد کی قوس اق سے محدود ہے  $\frac{1}{2}$  وء ہے۔  
کسی قطاع کا رقبہ جسکے سرے وء سے تعمیر ہوتے ہیں سر کیا  $\frac{1}{2}$  وء (و-و) ہے۔  
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر ملے نقطوں کو تعمیر کریں  
و کو خ- $\pi$  میں بدلنا چاہئے کیونکہ

$$\text{جزء} (خ - \pi) = - \text{جزء} \epsilon$$

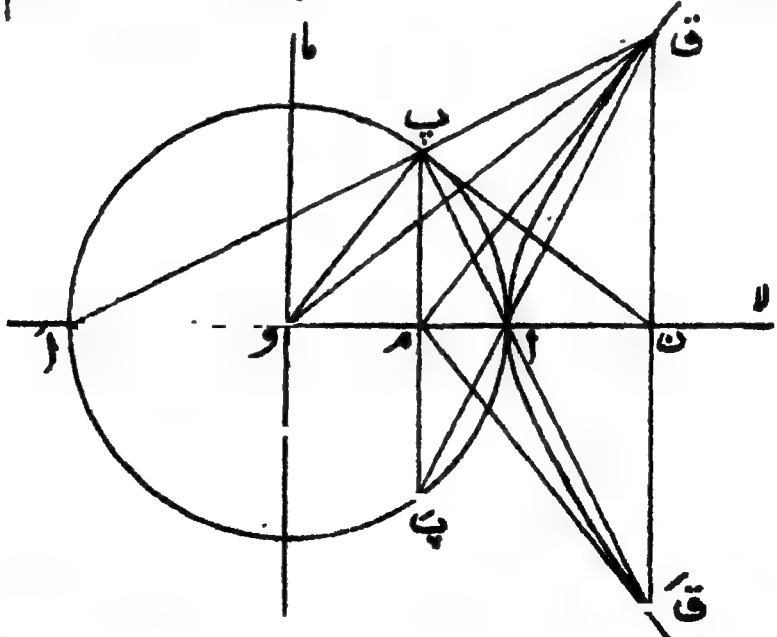
$$\text{اور جزء} (خ - \pi) = \text{جزء} \epsilon$$

۲۶۸۔ اگر ہم نصف قطر وء و کا ایک دائرہ بنائیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ  
(329) لیں جسکا معین م پ ہو تو زاویہ پ وء کو ط سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رقبہ وء پ} = \frac{1}{2} \text{ وء ط}$$

فرض کرو کہ پ پر کا ماس پ ن ہے تب

$$\text{و-ء} = \text{اجم ط م پ} = \text{اجب ط ن پ} = \text{وس ط مء} = \text{ہم ط}$$



ن سے ن ق، واپر عمود اور ن پ کے مساوی کینجوتب ون  
 - ن ق = و، اس لئے ق کا طریق نیم محور کا ایک قائم الزاویہ  
 قطع زائد ہے۔ اب قطاع و اق کے رقبہ کو  $\frac{1}{2}$  وء سے تعبیر کرو  
 تو حسب ثبوت دفعہ سابق ون = اجزء، ن ق = و اجزء۔  
 پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پر کے کسی نقطہ پ کا مسین اور فصل  
 علی الترتیب ا جب ط، ا جم ط سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں  $\frac{1}{2}$  و ط،  
 دائری قطاع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پر کے نقطہ ق  
 کا مسین اور فصل علی الترتیب ا اجزء، و اجزء سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں  
 $\frac{1}{2}$  وء، مقطاع و اق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب تمام  
 قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے  
 حوالے سے جیب اور جیب تمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔  
 یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے میں ایسے  
 ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔  
 ۲۶۹۔ دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر  
 غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو عامل ہوتا ہے  
 اس ط = ن ق = اجزء، اور، ا ق ط ط = ون = و اجزء،  
 اس لئے متناظر نقطوں کی دلیلیں ط، و، رشتوں مس ط = جیزء، ق ط ط  
 = جیزء کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

(830)

$$\frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ جیزء}}{1 + \text{اجزء}} = \text{مس } \frac{1}{2} \text{ جیزء}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{مس } \frac{1}{2} \text{ جیزء} = \frac{\text{مس ط}}{1 + \text{اجم ط}} = \frac{\text{جیب ط}}{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ جیزء}}$$

یا دلیلیں ط اور و، رشتہ مس  $\frac{1}{2}$  جیزء = مس  $\frac{1}{2}$  ط کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ و ق م > قطاع و اق > و اق

اسلئے

مسزء &gt; ۶ &gt; جزء

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $\frac{مسزء}{۶}$  ،  $\frac{جزء}{۶}$  کی انتہائیں جبکہ ۶ کو لا انتہاگھسا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ  $جزء = ۰$ ۔ ۱۔۲۷۰۔ چونکہ  $۶ = ۶ + ۶$  جزء $= ۶ + ۶$  مس ط

اسلئے

 $۶ = ۶ + ۶$  لوک و (قط ط + مس ط) $= ۶ + ۶$  لوک مس (  $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}$  ط )

دلیل ط کو مختلف نام دئے جا چکے ہیں ، چنانچہ کیلے (Cayley) اس کو

۶ کا گوڈرمنی (Gudermannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ۶ (gd u)

سے تعبیر کرتا ہے ، اس طرح ط = گڈ ۶ ، ۶ = گڈ ۶ ط = لوک مس (  $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}$  ط )۔ یہ نام گڈرمن

(Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ۶ کے

طول بلد (Longitude) سے موسوم کیا تھا لیمبرٹ (Lambert)

نے ط کو علوی (Transcendent) زاویہ کہا اور ہویل (Houel)

نے ۶ کا زائدی حیطہ کہا اور لکھا حظزء (amhu)۔ صفدرجے سے

۹۰ تک ۳۰ کے وقفوں سے ط کی قیمتوں کے لئے لوک مس (  $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶}$  ط ) $+ \frac{۱}{۶}$  ط کی قیمتوں کی ایک جدول جس میں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲

مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملیگی۔ اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے

دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کھیلے نے اخذ کیا تھا۔

(Crelle's journal, 1838.)

۱۔ دیکھو

(Théorie des fonctions complexes)

۲۔ دیکھو

(Quarterly journal, vol. XI. p. 220)

۳۔ دیکھو



(381)

اس جدول سے  $\omega$  کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں

جزء = مس طہ، مجزء = قسطہ  
کے ذریعہ زاویوں کے طبعی ماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کر کے  
معلوم کر سکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور ان کے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی  
خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les

Fonctions Hyperboïiques" in the Memoires de la Societe  
des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات

"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,

"Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten  
Hyperbol-funktionen" by Gunther.

## ملف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملے

۲۷۱۔ ملف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم  
استعمال کر کے آسانی کے ساتھ شکل  $\omega + \chi$  بہ میں بیان کیا جا سکتا ہے  
جہاں  $\omega$  اور  $\chi$  حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب  $(\omega + \chi)$  = جب  $\omega$  لا جب  $\chi$  + جم لا جب  $\chi$  +  
اسلئے جب  $(\omega + \chi)$  = جب لا جب  $\omega$  + جم لا جب  $\omega$  ... (۹)  
اسی طرح جم  $(\omega + \chi)$  = جم لا جب  $\omega$  - جم لا جب  $\omega$  ... (۱۰)  
نیز مس  $(\omega + \chi)$  = جب  $(\omega + \chi)$  جم  $(\omega - \chi)$

$$\frac{\text{جم}(\omega + \chi) \text{ جم}(\omega - \chi)}{\text{جب} \omega + \text{جب} \chi} =$$

$$\frac{\text{جم} \omega + \text{جم} \chi}{\text{مس}(\omega + \chi) = \text{جب} \omega + \text{جب} \chi} \dots (۱۱)$$

## ملف ولیلوں کے مقلوداری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل جب<sup>۱</sup> (لا + خ<sup>۱</sup>) پر غور کریں گے۔ فرض کرو

جب<sup>۱</sup> (لا + خ<sup>۱</sup>) = ع + خ<sup>۱</sup> بہ<sup>۱</sup> تب

لا + خ<sup>۱</sup> = جب (ع + خ<sup>۱</sup>) = جب ع جزبہ + خ<sup>۱</sup> جم ع جزبہ

لا = جب ع جزبہ<sup>۱</sup> = جم ع جزبہ

اسلئے یہ کو معلوم کرنیکی مساوات ہے

$$1 = \frac{لا^۲}{جزبہ^۲} + \frac{ما^۲}{جزبہ^۲}$$

یا لا (جزبہ<sup>۱</sup> - ۱) + ما (جزبہ<sup>۱</sup> - ۱) = جزبہ<sup>۱</sup> (جزبہ<sup>۱</sup> - ۱)

اگر ہم جزبہ<sup>۱</sup> کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

$$جزبہ^۱ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴لا}$$

$$اسلئے جزبہ^۱ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴لا}$$

اور چونکہ جزبہ مثبت ہے اسلئے

$$جزبہ^۱ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴لا}$$

اگر لا مثبت ہے۔ جزبہ کی اس قیمت کے جواب میں جب ع کی قیمت

$$لا جزبہ^۱ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴لا}$$

اب چونکہ جزبہ<sup>۱</sup> < ۱ جب ع اسلئے

$$جزبہ^۱ = \frac{1}{p} (لا + ما + ۱) \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} (لا + ما + ۱)^2 - ۴لا}$$

جب  $e = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1+u)a^2} - \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1-l)a^2}$  و  
 پس جملہ 'جب' کی قیمتیں مندرجہ صدر میں خواہ لاشیت ہو یا نفی۔  
 و درجی جملہ  $e = e$  سے حاصل ہوتا ہے  $b = \pm$  لوک  $\{e + a - a^2\}$   
 اسلئے جب 'لا'  $(a)$  = ک  $(1-l) + (1-l)$  جب 'لو'  $\pm$  لوک  $\{e + a - a^2\}$   
 جہاں ک ایک صحیح عدد ہے اور جب 'و'  $e$  کی صدر قیمت ہے  
 جو اس شرط جب  $e =$  و کو پورا کرتی ہے۔ بہم علامت کی تعیین کیلئے  
 رکھو لا۔ تو جب 'ا'  $a$  = ک  $(1-l) \pm$  لوک  $\{e + a - a^2\}$  اسلئے  
 $a = \pm$  جم ک  $(1-l)$  جب [خ لوک  $\{e + a - a^2\}$ ]

$$\pm = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1-l)a^2} - \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1+u)a^2}$$

اسلئے بہم علامت وہی ہونی چاہئے جو (1-l) کی ہے یا  
 جب 'لا'  $(a)$  = ک  $(1-l) + (1-l)$  جب 'لو'  $\pm$  لوک  $\{e + a - a^2\}$  ... (۱۲)

$$e = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1+u)a^2} + \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1-l)a^2}$$

$$و = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1+u)a^2} - \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + (1-l)a^2}$$

اگر ہم جب 'و'  $e$  + خ لوک  $\{e + a - a^2\}$  کو جب 'لا'  $(a)$  کی قیمت  
 خیال کریں اور اسے جب 'لا'  $(a)$  سے تعبیر کریں تو عام قیمت ہے  
 ک  $(1-l) + (1-l)$  جب 'لا'  $(a)$

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی دلیلوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔

ایک خاص صورت لا < 'ا' ما = کی ہے اس صورت میں  
 $ع = لا$  و  $ا = ا$  اور جب لا کی صدر قیمت  $\frac{1}{4} \pi + خ$  لوک {لا + لا - ا} ہے۔  
 ہم جانتے ہیں کہ جب لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا = ا۔

۳۷۲۔ ثانیاً فرض کرو کہ حجم (لا + خ ما) = ع + خ بہ تو پہلی صورت کی  
 طرح حاصل ہوتا ہے

لا = حجم عہ جزیہ ' ما =۔۔ جب عہ جزیہ  
 اور حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جزیہ} = \frac{1}{4} \sqrt{لا + ا} + \frac{1}{4} \sqrt{لا - ا} = ع$$

$$\text{جم عہ} = \frac{1}{4} \sqrt{لا + ا} - \frac{1}{4} \sqrt{لا - ا} = و$$

اس لئے حجم (لا + خ ما) = اک ± حجم و ± خ لوک {ع + ع - ا}۔  
 آخری رقم کی ملاست کی تفہیم کے لئے رکھو لا = ۰ تو

$$\text{خ ما} = \text{جم} \left[ \frac{1}{4} \pi \pm خ \text{ لوک } (ا + ا) \right] = \frac{1}{4} \pi \pm خ \text{ لوک } (ا)$$

$$+ \left[ \frac{1}{4} \pi \pm خ \text{ لوک } (ا - ا) \right] = \frac{1}{4} \pi \pm خ \text{ لوک } (ا)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم ملاست پہلی سے مختلف ہونی چاہئے یا

$$\text{جم} (لا + خ ما) = اک \pm \left[ \frac{1}{4} \pi \pm خ \text{ لوک } (ع + ع - ا) \right] \dots (۱۳)$$

اگر حجم و - خ لوک {ع + ع - ا} سے حجم (لا + خ ما) کی صدر قیمت

تعبیر ہو تو عام قیمت اک ± حجم (لا + خ ما) ہے۔

۲۷۴۔ فرض کرو کہ مسن (لا + خا) = ع + خ + تب

$$\frac{\text{جب ۲ ع + خ جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{لا + خا}$$

اسلئے  $\frac{\text{لا}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{ما}$  ،  $\frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{ما}$  ،  $\frac{\text{جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{ما}$

اسلئے  $\frac{\text{لا + ما}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ ع + جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \frac{\text{جم ۲ ع - جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}}$

$$\frac{\text{جم ۲ ع - جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} =$$

یا  $\frac{\text{جم ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{لا - ما}$  ،

اور  $\frac{\text{جیز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جیز ۲ بہ}} = \text{لا + ما}$

اسلئے مس ۲ ع =  $\frac{\text{لا}}{\text{لا - ما}}$  ، اور مسن ۲ بہ =  $\frac{\text{ما}}{\text{لا + ما}}$

اب چونکہ  $\frac{\text{ما}}{\text{لا - ما}} = \frac{\text{قوة} - \text{قوة}}{\text{قوة} + \text{قوة}}$

اسلئے  $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}} = \frac{\text{قوة}}{\text{قوة}}$

یا  $\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}} = \frac{1}{\text{لوک}}$  ،  $\left\{ \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}} \right\}$

اسلئے مسن (لا + خا) کی قیمتیں

$$\text{مست}^{\text{ا}} (ا + خ + نا) = ک + مست^{\text{ا}} \frac{۱۲}{۲۱ - ۱۱ - ۱}$$

$$+ \frac{۱}{۲} \text{خ کوک} \left\{ \frac{۱(۱+۱) + ۱۱}{۱(۱-۱) + ۱۱} \right\} \dots \dots (۱۴)$$

سے ملتی ہیں۔

## مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵۔ اگر جنزعه = ی تو عہ کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور ا سے جنزہ<sup>ا</sup> ی سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جنزہ<sup>ا</sup> ی اور مست<sup>ا</sup> ی کے لئے ہے۔

(834) اگر ی = جنزہ =۔ خ جب خ عہ تو خ ی = جب خ عہ ی عہ = چ جب<sup>ا</sup> خ ی

اسی طرح اگر ی = جنزہ = جم خ عہ تو عہ = چ جم<sup>ا</sup> ی نیز اگر ی = منزعہ

تو عہ = چ مست<sup>ا</sup> خ ی۔ ہیں مقلوب زائدی تفاعل مقلوب

دائری تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جنزہ<sup>ا</sup> ی =۔ خ جب<sup>ا</sup> خ ی

جنزہ<sup>ا</sup> ی =۔ خ جم<sup>ا</sup> ی

مست<sup>ا</sup> ی =۔ خ مست<sup>ا</sup> خ ی

سے بیان ہوتے ہیں۔

۲۷۶۔ ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے متغیر کے مقلوب دائری تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلا واسطہ ہی معلوم کرینگے۔

(۱) اگر ی = جنزہ تو عہ = تو<sup>۲</sup> = ی<sup>۲</sup>۔ اسکو تو<sup>۲</sup> کی قیمت

معلوم کر نیے لگے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$u^2 = y \pm \sqrt{y+1}$$

اس لئے  $e = 2 \text{ خک} + \pi + \text{لوک} (y + \sqrt{y+1})$

یا  $e = 2 \text{ خک} + \pi + \text{لوک} (y - \sqrt{y+1})$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جلد  $2 \text{ خک} + \pi + (-1) \text{ ک} (y + \sqrt{y+1})$  میں

شامل ہیں۔

پس جنز'ا کی عام قیمت  $2 \text{ خک} + \pi + (-1) \text{ ک} (y + \sqrt{y+1})$

ہے اور اسکی صدر قیمت  $\text{لوک} (y + \sqrt{y+1})$  ہے۔ اس صدر

قیمت کو بالعموم جنز'ای سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر  $y = \text{سنز} \text{ع} \text{ تو } u^2 = y^2$  اسلئے

$$u^2 = y \pm \sqrt{y+1} \text{ 'ا' اس طرح } e = 2 \text{ خک} + \pi \pm \text{لوک} (y + \sqrt{y+1})$$

پس جنز'ای کی عام قیمت  $2 \text{ خک} + \pi \pm \text{لوک} (y + \sqrt{y+1})$  ہے اسکی

صدر قیمت جو بالعموم جنز'ای سے تعبیر کی جاتی ہے  $\text{لوک} (y + \sqrt{y+1})$  ہے

$$(۳) \text{ اگر } y = \text{سنز} \text{ع} \text{ تو } \frac{u^2}{u+1} = y \text{ 'یا' } \frac{u^2}{u-1} = y + 1$$

اسلئے  $e = 2 \text{ خک} + \pi + \frac{1}{2} \text{ لوک} (\frac{y+1}{y-1})$  یہ سنز'ای کی عام قیمت

ہے اور اسکی صدر قیمت  $\frac{1}{2} \text{ لوک} (\frac{y+1}{y-1})$  ہے۔

(۴) اسی طرح منزای، قطزای، قنزای کی صد قیمتوں کے لئے  
علی الترتیب حملے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{2} \text{ لوک } \left( \frac{1+1}{1-1} \right) \text{ لوک } \frac{1+1}{1-1} \text{ لوک } \frac{1+1}{1-1}$$

کبھی مساواتوں کا حل

(335)

۲۷۷ — دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب کبھی لا + ق لا  
+ ر = کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ق منفی ہو تو اصلیں

$$\sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب ط}} - \sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط + } \frac{2}{3} \text{)}} - \sqrt{\frac{4}{3} \text{ ق} \times \text{جب (ط + } \frac{2}{3} \text{)}} \\ \times \text{جب (ط + } \frac{2}{3} \text{)}$$

جہاں جب ۳ ط =  $\left( -\frac{2}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$  — اب ہم یہ دکھانگے کہ کبھی کو  
اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں  
اس صورت میں شرط  
 $۲۷۷ + ۲ ق < ۰$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کبھی

۴ چیز ۶ + ۳ چیز ۶ = ۳ چیز ۶  
پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ۱ چیز ۶، تب لا اس مساوات

$$\text{لا} + \frac{3}{4} \text{ لا} - \frac{1}{4} \text{ لا} = ۳ چیز ۶ = ۰$$

کو پورا کرنا ہے۔ یہ کبھی، کبھی لا + ق لا + ر = ۰ پر منطبق ہو گا اگر



$$ق = \frac{۳}{۴} د' ر = \frac{۱}{۴} د' جبر ۳ ع یا جبر ۳ ع = ۲ - \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right)$$

اب کبی ۲ جبر ۲ ع + ۳ جبر ۳ ع = جبر ۳ ع کی اصلیں ہیں

$$جبر ۲ ع' جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right)$$

اسلئے کبی لا + ق لا + ر = کی اصلیں ہیں

$$\left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' \right] \left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' \right]$$

$$یا \left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' \right] \left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' \right]$$

جہاں جبر ۳ ع = ۲ -  $\left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right)$  - اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں

دی گئی ہیں تو عدد ۳ ع کو زائدی جوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا

ہے اور پھر انہی جدولوں سے جبر ۲ ع' جبر ۲ ع' معلوم کئے جاتے ہیں۔

پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

$$۲ جبر ۲ ع - ۳ جبر ۳ ع = جبر ۳ ع$$

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہو گا کہ اگر ق =  $-\frac{۳}{۴}$  و  $\frac{۲}{۴}$ ،

$$۲ - \frac{۱}{۴} د' جبر ۳ ع = ۲ - ۳ جبر ۳ ع = ۲ - ۳ جبر ۳ ع = ۲ - ۳ جبر ۳ ع$$

لا + ق لا + ر = ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

$$\left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' \right] \left[ \frac{۲}{۴} ق جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' + \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right) جبر ۲ ع' \right]$$

$$+ \left( \frac{۲}{۴} ق + \frac{۲}{۴} خ \right)$$

۱-  $\frac{1}{3}$  ق جزو ۱-  $\frac{1}{3}$  ق (- جزو ۱۳ جزو)

جہاں جزو ۶۳ =  $\frac{1}{3}$  (- ۲۷  $\frac{1}{3}$ ) پس حسب صورت سابقہ ہم کمی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کر نیے لئے جبکہ ق اور ر دیے گئے ہوں (۱۶) زائدی تقاعلوں کی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔

۲۷۸- طہ کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ع کی قیمت کی جدول

طہ	ع = لوکھوس ( $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ طہ)	طہ	ع = لوکھوس ( $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ طہ)
۰	۵۰	۱۵	۵۲۶۱۷۹۹۳
۱	۵۰۱۷۹۵۳۳	۱۶	۵۲۷۹۲۵۲۷
۲	۵۰۳۴۹۰۶۶	۱۷	۵۲۹۷۷۰۶۰
۳	۵۰۵۲۳۵۹۹	۱۸	۵۳۱۶۱۵۹۳
۴	۵۰۶۹۸۱۳۲	۱۹	۵۳۳۴۶۱۲۶
۵	۵۰۸۷۲۶۶۵	۲۰	۵۳۵۳۰۷۵۹
۶	۵۱۰۴۷۱۹۸	۲۱	۵۳۷۱۵۱۹۱
۷	۵۱۲۲۱۷۳۰	۲۲	۵۳۸۹۹۷۲۴
۸	۵۱۳۹۶۲۶۳	۲۳	۵۴۰۸۴۲۵۷
۹	۵۱۵۷۰۷۹۶	۲۴	۵۴۲۶۸۷۹۰
۱۰	۵۱۷۴۵۳۲۹	۲۵	۵۴۴۵۳۳۲۳
۱۱	۵۱۹۱۹۸۶۲	۲۶	۵۴۶۳۷۸۵۶
۱۲	۵۲۰۹۴۳۹۵	۲۷	۵۴۸۲۲۳۸۹
۱۳	۵۲۲۶۸۹۲۸	۲۸	۵۵۰۰۶۸۲۲
۱۴	۵۲۴۴۳۴۶۱	۲۹	۵۵۱۹۱۳۵۵

ط	ط	ط	ط		
ط	ط	ط	ط		
۱۵۰۹۴۸۳۳۵	۵۹۲۵۰۲۲۵	۵۴	۵۵۴۹۳۰۷۱	۵۵۲۳۵۹۸۸	۳۰
۱۵۱۲۴۱۷۷۲	۵۹۲۲۴۷۷۸	۵۴	۵۵۶۹۵۹۲۷	۵۵۴۱۰۵۲۱	۳۱
۱۵۱۵۴۲۲۴۲	۵۹۵۰۹۳۱۱	۵۵	۵۵۹۰۰۲۲۹	۵۵۵۸۵۰۵۴	۳۲
۱۵۱۸۵۰۵۰۷	۵۹۷۷۳۸۲۲	۵۶	۵۶۱۰۷۲۷۵	۵۵۷۵۹۵۸۷	۳۳
۱۵۲۱۶۴۷۴۸	۵۹۹۴۸۲۷۷	۵۷	۵۶۳۱۶۵۸۱	۵۵۹۳۴۱۱۹	۳۴
۱۵۲۴۹۱۶۰۶	۶۰۱۲۲۹۱۰	۵۸	۵۶۵۲۸۳۶۶	۵۶۱۰۸۶۵۲	۳۵
۱۵۲۸۲۵۶۶۸	۶۰۲۹۷۴۴۲	۵۹	۵۶۷۴۲۷۵۵	۵۶۲۸۳۱۸۵	۳۶
۱۵۳۱۶۹۵۷۹	۶۰۴۷۱۹۷۹	۶۰	۵۶۹۵۹۸۸۰	۵۶۴۵۷۷۱۸	۳۷
۱۵۳۵۲۴۰۴۸	۶۰۶۴۶۵۰۸	۶۱	۵۷۱۷۹۸۸۰	۵۶۶۳۲۲۵۱	۳۸
۱۵۳۸۸۹۸۶۰	۶۰۸۲۱۰۴۱	۶۲	۵۷۴۰۲۹۰۱	۵۶۸۰۶۷۸۴	۳۹
۱۵۴۲۶۷۸۸۲	۶۰۹۹۵۵۷۴	۶۳	۵۷۶۲۹۰۹۵	۵۶۹۸۱۳۱۷	۴۰
۱۵۴۶۵۹۰۸۳	۶۱۱۷۰۱۰۷	۶۴	۵۷۸۵۸۶۳۰	۵۷۱۵۵۸۵۰	۴۱
۱۵۵۰۶۴۵۴۲	۶۱۳۴۴۶۴۰	۶۵	۵۸۰۹۱۶۷۲	۵۷۳۳۰۳۸۳	۴۲
۱۵۵۴۸۵۴۷۲	۶۱۵۱۹۱۷۲	۶۶	۵۸۳۲۸۴۰۶	۵۷۵۰۴۹۱۶	۴۳
۱۵۵۹۲۳۲۳۷	۶۱۶۹۳۷۰۶	۶۷	۵۸۵۶۹۰۲۶	۵۷۶۷۹۴۴۹	۴۴
۱۵۶۳۷۹۳۸۷	۶۱۸۶۸۲۳۹	۶۸	۵۸۸۱۳۷۳۶	۵۷۸۵۳۹۸۲	۴۵
۱۵۶۸۵۵۶۸۵	۶۲۰۴۲۷۷۲	۶۹	۵۹۰۶۲۷۵۵	۵۸۰۲۸۵۱۵	۴۶
۱۵۷۳۵۴۱۵۲	۶۲۲۱۷۱۷۰	۷۰	۵۹۳۱۶۳۱۶	۵۸۲۰۳۰۴۷	۴۷
۱۵۷۸۷۷۷۱۲۰	۶۲۳۹۱۸۳۸	۷۱	۵۹۵۷۴۶۶۹	۵۸۳۷۷۵۸۰	۴۸
۱۵۸۴۴۷۳۰۰	۶۲۵۶۶۴۷۱	۷۲	۵۹۸۳۸۰۷۹	۵۸۵۵۲۱۱۳	۴۹
۱۵۸۰۰۷۸۶۷	۶۲۷۴۰۹۰۲	۷۳	۶۰۰۹۸۳۲	۵۸۷۲۶۶۶۶	۵۰
۱۵۹۴۴۲۵۷۲	۶۲۹۱۵۴۳۶	۷۴	۶۰۳۸۱۲۳۵	۵۸۹۰۱۱۷۹	۵۱
۶۵۰۲۷۵۸۹۴	۶۳۰۸۹۹۶۹	۷۵	۶۰۶۶۱۶۱۷	۵۹۰۷۵۷۱۲	۵۲

ط	ط	ط	ط	ط	ط
۲۵۹۳۸۷۰۰۲	۱۵۴۶۶۰۷۶۶	۸۴	۲۵۰۹۷۳۲۲۰	۱۵۳۲۶۲۵۰۲	۷۶
۳۵۱۳۱۳۰۱۳	۱۵۴۸۳۵۲۹۹	۸۵	۲۵۱۷۲۱۲۱۸	۱۵۳۴۳۹۰۳۵	۷۷
۳۵۳۵۴۶۷۷۵	۱۵۵۰۹۸۳۲	۸۶	۲۵۲۵۲۸۰۲۷	۱۵۳۶۱۳۵۶۸	۷۸
۳۵۴۲۵۳۳۳۴	۱۵۵۱۸۴۳۶۴	۸۷	۲۵۳۳۰۴۰۰۷	۱۵۳۷۸۸۱۰۱	۷۹
۴۵۰۴۸۱۲۵۴	۱۵۵۲۵۸۸۹۷	۸۸	۲۵۴۲۶۲۲۶۰	۱۵۳۹۶۲۶۳۴	۸۰
۴۵۷۴۱۲۴۸۸	۱۵۵۳۳۳۳۳۰	۸۹	۲۵۵۲۲۰۹۰۲	۱۵۴۱۳۷۱۷۷	۸۱
∞	۱۵۵۷۷۷۶۳	۹۰	۲۵۶۶۰۳۰۶۱	۱۵۴۳۱۱۷۰۰	۸۲
			۲۵۷۹۴۲۱۹۰	۱۵۴۴۸۶۲۳۳	۸۳

## سولہویں باب پر مثالیں

(387)

۱۔ ثابت کرو کہ

۸ جیزن لا جیز ۲ = ۲ جیز (ن + ۲) - ۷ جیزن لا ۲ جیز (ن - ۲) لا

۲۔ اگر جم (ع + خ + ی) = جم فہ + غ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = ± جب ع

= ± جیز ۲

۳۔ اگر جم (ط + غ فہ) جم (ع + خ + ی) = ۱ تو ثابت کرو کہ

منز فہ جیز ۲ = جب ع اور منز ۲ جیز فہ = جب ط

۴۔ اگر مس ما = مس ع منز ۲ مس ی = مم ع منز ۲

تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جیز ۲ قمر ۲ ع

۵۔ جب (ع + غ یا کو شکل ۱) + غ ب میں تحویل کرو۔



لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر  $f > 1$ ، لیکن مستدق ہوتا ہے اگر  $f < 1$ ۔ کیونکہ  $\frac{1}{n}$  متع ہے جبکہ  $f > 1$  اور مستدق ہے جبکہ  $f < 1$ ۔

مائل ضرب  $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \dots (1 + \frac{1}{n})$  یقیناً متع ہے

اگر  $y$  کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ مائل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر  $y$  کا حقیقی حصہ صفر ہو۔ جب  $y$  کا حقیقی حصہ منفی ہو تو مائل ضرب صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔ کیونکہ

لو کہ  $(1 + \frac{1}{n}) = \frac{y}{n} - \frac{y}{n^2} (1 + \frac{1}{n})$  جہاں  $|z| < 1$  کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک متقل عدد سے کم ہے، اسلئے  $\frac{1}{n}$  لو کہ  $(1 + \frac{1}{n})$  کا حقیقی حصہ  $\infty$  کی طرف متع ہوتا ہے جبکہ  $y$  کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ یہ ان واقعات پر مبنی ہے کہ  $\frac{1}{n}$  متع ہے اور  $\frac{1}{n}$  مستدق۔

(348)

جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر پیرا کرنا  
۲۸۲۔ اب ہم وہ جملے معلوم کریں گے جو جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ لا ہو۔ ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لیتے۔  
اب

$$\begin{aligned} \text{جب } \theta &= 2 \text{ جب } \frac{\theta}{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2} \\ 2 &= \frac{\theta}{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

اور اس عمل کو جاری رکھنے سے

$$\text{جب } n = 2 \text{ جب } \frac{n}{n} \text{ جب } \frac{n+1}{n} \text{ جب } \frac{n+2}{n} \dots \text{ جب } \frac{n+(n-1)}{n}$$

جہاں  $n$  کی کوئی مثبت صحیح قوت ہے۔ پس

$$\text{جب } n = 2 \text{ جب } \frac{n}{n} \text{ جم } \frac{n}{n} (\text{جب } \frac{n}{n} - \text{جب } \frac{n}{n})$$

$$(\text{جب } \frac{n}{n} - \text{جب } \frac{n}{n}) \dots (\text{جب } \frac{n}{n} - \text{جب } \frac{n}{n})$$

اور چونکہ ہنسلا۔ جب لاقم  $\frac{n}{n} = n$  اسلئے

$$n = 2 \text{ جب } \frac{n}{n} \text{ جب } \frac{n}{n} \dots \text{ جب } \frac{n}{n} \text{ جب } \frac{n}{n}$$

پس عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\dots \dots \dots = \frac{\text{جب } n}{\text{جب } n \text{ جم } n} \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right) \dots$$

$$\left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right)$$

یہ دفعہ ۸ کے مسئلہ (۱۹) کی وہ خاص صورت ہے جبکہ  $n = 2$  کی ایک قوت ہو۔ بلاشبہ ہم اس عام مسئلہ کو اختیار کر سکتے تھے۔ فرض کرو  $\frac{1}{p} = (n-2) = r$  تب اگر  $m$  کوئی عدد ہو  $r$  سے چھوٹا تو

$$\text{جب } n = 2 \text{ جب } \frac{n}{n} \text{ جم } \frac{n}{n} \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{n}{n}}{\text{جب } \frac{n}{n}}\right) \text{ جب } \frac{n}{n}$$

کیونکہ عددوں کے کسی جٹ کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑھ نہیں سکتا۔ اب اگر سلسلہ  $1, 2, 3, \dots, n$  مستحق ہو تو دفعہ ۲۸۰ میں جو کچھ ثابت ہوا ہے اس کی بوجہ لامتناہی مائل ضرب  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  مستحق ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی مقررہ عدد  $n$  کے جواب میں  $n$  متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ  $1 + 2 + 3 + \dots + n > n$  کے لئے

$$(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \dots (1 + n) > 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

اسلئے رکی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے

$$(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \dots (1 + n) > 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

اور اسلئے مائل ضرب  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  مستحق ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  مستحق ہو لیکن سلسلہ  $1, 2, 3, \dots, n$  ایسی صورت میں مائل ضرب  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  کو نامطلقاً مستحق یا نیم مستحق کہتے ہیں۔ مسئلہ بالا سے مستنبط ہوتا ہے کہ لامتناہی مائل ضرب

$$(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \dots (1 + n) > 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

مستحق ہے اگر

$$1 + 2 + 3 + \dots + n > 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ایک مستحق سلسلہ ہو۔

(342)

فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا ایک قوتاً ترتیب  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ہے جو سب کے سب ہم علامت ہیں اور فرض کرو کہ  $a_1 > 0$ ،

لیکن فرض کرو کہ سلسلہ  $a_1, a_2, a_3, \dots$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > 0$$





اگر یہ سلسلہ مستدق ہے تو لامتناہی مائل ضرب صفر سے مختلف ایک معین آہٹا کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے۔ اگر یہ لامتناہی مائل ضرب صفر کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ بالا -∞ کی طرف متعرج ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خراج کرتے ہیں۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لامتناہی سلسلہ کا استدقاق لامتناہی مائل ضرب کے استدقاق کے مائل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صہ کے جواب میں  $n$  منتخب ہو سکے ایسا کہ  $r = 1, 2, 3, \dots$  کے لئے

لوک (۱)  $(1 + \frac{1}{n})$  ی  $\dots$  ی  $(1 + \frac{1}{n})$  لوک (۱)  $(1 + \frac{1}{n})$  غن،  $r = 1$  -  
اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (۱) میں ثابت کردہ مسئلہ

۱-  $(1 + \frac{1}{n})$  ای  $(1 + \frac{1}{n})$  ای  $(1 + \frac{1}{n})$  کو استعمال کرنے سے مائل ہوتا ہے | غن،  $r = 1$   $(1 + \frac{1}{n})$  صہ - اب اگر صہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ  $(1 + \frac{1}{n})$  صہ  $(1 + \frac{1}{n})$  اور اسلئے  $n$  منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$r = 1, 2, 3, \dots$  کے لئے | غن،  $r = 1$  ای  $(1 + \frac{1}{n})$  ی  $\dots$  ی  $(1 + \frac{1}{n})$   $r = 1$  -  
صہ، اس لئے لامتناہی مائل ضرب مستدق ہے۔ اس کے بالعکس مان لو کہ  $r = 1, 2, 3, \dots$  کے لئے  $n$  منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ | غن،  $r = 1$  صہ - دفعہ ۲۲۹ (۱) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

ای | &gt; | تو

$$| \text{لوک} (ای + ۱) | > | ای | (۱ + \frac{۱}{۲}) (1 - \frac{ای}{ای})$$

$$\text{اس لئے } | \text{لوک} (ای + ۱) | > | ای | (۱ + \frac{۱}{۲}) (1 - \frac{۱}{۱})$$

$$\text{یا } | \text{لوک} (ای + ۱) | > | ای | (۱ + \frac{۱}{۲}) (1 - \frac{۱}{۱})$$

(340)

بشرطیکہ  $(۱ + \frac{۱}{۲}) (1 - \frac{۱}{۱}) > ۱$  اور اگر ضد مقررہ ہے تو ضد متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استباق

کی شرط پوری ہو چکی۔  
۲۸۰۔ فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر  $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, \dots$  ہے جنہیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لا متناہی مائل ضرب

$$(۱ + ۱)(۱ + ۲) \dots (۱ + ۱۰) \dots (۱ + ۱۰۰) \dots (۱ + ۱۰۰۰) \dots$$

$$\text{اور } (۱ - ۱)(۱ - ۲) \dots (۱ - ۱۰) \dots (۱ - ۱۰۰) \dots (۱ - ۱۰۰۰) \dots$$

دونوں مستحق ہوتے ہیں اگر سلسلہ  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots$  مستحق ہو اور مستحق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متعین ہو۔  
چونکہ

$$(۱ + ۱)(۱ + ۲) \dots (۱ + ۱۰) \dots (۱ + ۱۰۰) \dots (۱ + ۱۰۰۰) \dots < ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots$$

اس لئے یہ واضح ہے کہ مائل ضرب  $(۱ + ۱)(۱ + ۲) \dots$  متعین ہوتا ہے اگر سلسلہ  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots$  متعین ہو۔

نیز

$$\frac{1}{(1-ع)(1-ع) \dots (1-ع)} < (1+ع)(1+ع) \dots (1+ع)$$

پس اگر  $ع$  متع ہو تو حاصل ضرب  $(1-ع)(1-ع) \dots (1-ع)$  صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستقر خیال کیا جاتا ہے۔  
پھر اگر  $ع$  مستقر ہو تو فرض کرو کہ صبر اختیاری طور پر نتیجہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو  $n$  منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ  $1 = 2^m 3^p \dots$  کے لئے

$$1 + ع + ع^2 + \dots + ع^n > ع^n$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-ع)(1-ع) \dots (1-ع)$$

$$< 1 - (ع + ع^2 + \dots + ع^n) < 1 - ع^n$$

$$\text{اور اسلئے } |1 - (ع + ع^2 + \dots + ع^n)| > 1 - ع^n$$

اور اس طرح وہ شرط جو لامتناہی حاصل ضرب  $(1-ع)(1-ع) \dots$  کے استنتاج کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+ع)(1+ع) \dots (1+ع)$$

$$> \frac{1}{(1-ع)(1-ع) \dots (1-ع)} > \frac{1}{1-ع}$$

(341)

اور اسلئے  $| (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \dots (1 + \epsilon_n) - 1 | > \frac{1}{2}$   
 پس اگر  $\epsilon$  اختیارى طور پر منتخب ہو تو ہم  $\epsilon$  کو متعین کر سکتے ہیں ایسا کہ  
 $\epsilon > \frac{1}{2} (1 + \epsilon) > \frac{1}{2}$  اور اسلئے  $n$  متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ  
 $r = 1, 2, 3, \dots$  کے لئے

$$| (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \dots (1 + \epsilon_n) - 1 | > \frac{1}{2}$$

اس لئے حاصل ضرب  $\prod (1 + \epsilon_i)$  مستحق ہے۔ یہ واضح ہے کہ  
 اس شرط کی بجائے کہ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  سب کے سب  
 ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جا سکتی ہے کہ ان عددوں کے ایک  
 محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم  
 $\prod (1 + \epsilon_i)$  یا  $\prod (1 - \epsilon_i)$  سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد  
 اسلئے استنتاج کو متاثر کئے بغیر ملحدہ کر سکتے ہیں۔  
 ۲۸۱۔ اب لامتناہی حاصل ضرب

$(1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \dots (1 + \epsilon_n) \dots$   
 پر غور کرو جہاں  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  متغیر عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائی گئے کہ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  کے مقیاسوں کا سلسلہ

$$1 + \epsilon_1 + 1 + \epsilon_2 + \dots + 1 + \epsilon_n + \dots$$

مستحق ہو تو اوپر کا لامتناہی حاصل ضرب بھی مستحق ہے۔ اس  
 صورت میں لامتناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستحق کہتے ہیں۔  
 ہم دیکھتے ہیں کہ

$$| (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \dots (1 + \epsilon_n) - 1 |$$

$$> \frac{1}{2} (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \dots (1 + \epsilon_n) - 1$$

مقیاس کو تعبیر کرتا ہے تو اس لاستناہی مائل ضرب کے استدقاق کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ اض<sup>ن</sup> اور ط<sup>ن</sup> دونوں معین قیمتوں کی طرف مستقیم ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔ اگر ن کے ساتھ اض<sup>ن</sup> ابھی لا انتہا بڑھے تو اس لاستناہی مائل ضرب کو متع کہتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں جبکہ یہ حاصل ضرب مستقیم نہ ہو اسکو اہترازی مائل ضرب کہتے ہیں، لیکن اہترازی حاصل ضربوں کو اکثر متع کہا جاتا ہے۔

وہ ضروری اور کافی شرط کہ لاستناہی مائل ضرب ی ای ی۔ ی ای۔۔۔ ایک معین انتہا (صفر سے مختلف) کی طرف مستقیم ہو یہ ہے کہ اختیاری طور پر متعہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک صحیح عدد ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

ای ای + ۱ ای + ۲ ای + ۳ ... ی ی + ۱ ی + ۲ ی + ۳ ... صہ - یہ ثابت کر نیکی لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ ض<sup>ن</sup>، ض<sup>ن</sup> کی طرف مستقیم ہوتا ہے جو صفر سے مختلف ایک عدد ہے۔ تب عددوں اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>،

... اض<sup>ن</sup> ... کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب محدود اض<sup>ن</sup> - ضہ سے بڑے ہیں جہاں ضہ اختیاری طور پر متعہ ایک مثبت عدد ہے ایسا کہ اض<sup>ن</sup> - ضہ < ۰۔ نیز ان عددوں میں سے کوئی عدد معدوم نہیں ہوتا، اس لئے ایک مثبت عدد ک موجود

ہے جو سب عددوں اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>، اض<sup>ن</sup>، ... سے (339) چھوٹا ہے۔ اب چونکہ ض<sup>ن</sup> ایک معین انتہا کی طرف مستقیم ہوتا ہے صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ اض<sup>ن</sup> - ض<sup>ن</sup> | < صہ

کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے۔

پس  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔ اور اسلئے مذکورہ شرط ضروری ہے۔

پھر یہ ثابت کر نیکی کے لئے کہ یہ شرط کافی ہے مان لو کہ وہ پوری ہوتی ہے۔ تب صہ کی کسی مقررہ قیمت کے جواب میں ن مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

$|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔ اور اس لئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

$|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اعداد  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

$|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔ سب کے سب ایک ثابت

مثبت عدد لہ سے کم ہیں۔ اب چونکہ  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

$|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔ جہاں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

اور چونکہ صہ کو کافی چھوٹا لینے سے لہ صہ اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

مستحق ہوتا چاہئے۔ لا متناہی حاصل ضرب  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

پر غور کر نیکا آسان طریقہ سلسلہ

لوک  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کی قیمتیں  $|1| + |2| + |3| + \dots$  کے لئے۔

پر غور کر نیکا ہے۔

جہاں عہ دائری تاپ کی اکائی ہے۔

۱۳۔ یو لکاسد جب لا =  $\frac{1}{لا}$  جم  $\frac{1}{۲}$  لا جم  $\frac{1}{۴}$  لا جم  $\frac{1}{۸}$  لا ..... سے اخذ کرو

$$(۱) \quad \frac{1}{\frac{1}{لا} + 1} \times \frac{1}{۲} + \frac{1}{\frac{1}{لا} + 1} \times \frac{1}{۴} + \frac{1}{1 - لا} = \frac{1}{لا}$$

$$..... + \frac{1}{\frac{1}{لا} + 1} \times \frac{1}{۸} +$$

$$(۲) \quad \frac{1}{لا} = \frac{1}{۲} قظر \frac{1}{۲} لا + \frac{1}{۴} قظر \frac{1}{۲} لا + \frac{1}{۸} قظر \frac{1}{۴} لا +$$

$$..... + \frac{1}{۸} قظر \frac{1}{۸} لا +$$





# سترہواں باب

## لامتناہی حاصل ضرب

### لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۹۷۲۔ فرض کرو کہ حقیقی یا ملطف عددوں کا ایک تواتری 'ی' ہے  
 .... 'ی' ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے۔ ان عددوں  
 میں سے پہلے 'ن' عددوں کے حاصل ضرب  $ی \times ی \times ی \times ی \dots ی$   
 پر غور کرو۔

اگر 'ض' صفر سے مختلف ایک معین انتہا ض کی طرف  
 مستدق ہو جبکہ 'ن' کو لا انتہا بڑا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ 'ض'  
 لامتناہی حاصل ضرب 'ی' ہے .... 'ی' کی انتہا یا انتہائی قیمت  
 ہے اور یہ لامتناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔ 'ن' حاصل ضربوں  
 مستدق لامتناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے ان حاصل ضربوں  
 کو خارج کر دینا سہولت بخش ہے جسکے لئے 'ض' صفر کی طرف  
 مستدق ہو۔

اگر  $ض = ا$  (جم طین + خجب طین) جہاں  $ا$  'ض' کے

جہاں 
$$ب = \left(1 - \frac{جبا^2}{\pi(1+m)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{جبا^2}{\pi^2}\right)$$

اب ن کو  $\pi \setminus \pi$  سے بڑا لیکرم کو متخیر کیا جاسکتا ہے ایسا (344)  
 $\pi(1+m) > \pi$  تب ب مثبت ہے اور ایک سے کم - نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

ب  $< 1 - جبا^2$   $\left\{ \frac{\pi}{\pi} + \dots + \frac{\pi(1+m)^2}{\pi} \right\}$   
 اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھانے ہیں کہ اگر  $\pi > \frac{1}{\pi}$  تو  

$$\frac{جبا^2}{\pi} < \frac{جبا^2}{\pi}$$

پس اگر  $\pi > \frac{1}{\pi}$  تو  $\frac{\pi}{\pi} > \frac{\pi}{\pi}$  نیز  $\frac{جبا^2}{\pi} > \frac{جبا^2}{\pi}$

اسے ب  $< 1 - \frac{جبا^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi(1+m)} + \frac{1}{\pi(1+m)} \right\}$

$< 1 - \frac{جبا^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\pi(1-r)} + \dots + \frac{1}{\pi(1+m)} + \frac{1}{\pi(1+m)} \right\}$

$< 1 - \frac{جبا^2}{\pi} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) < 1 - \frac{جبا^2}{\pi}$

چونکہ ب، ایک اور  $1 - \frac{جبا^2}{\pi}$  کے درمیان ہے اسے ہم کہہ سکتے ہیں

ب = ا -  $\frac{\pi^2}{4}$  جہاں  $\pi$  مفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$\text{جب } \pi = 0 \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جم } \frac{\pi}{2} \text{ (ا - جب } \frac{\pi^2}{4} \text{)} \text{ (ا - جب } \frac{\pi^2}{4} \text{)} \dots$$

$$\dots \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \dots$$

جہاں  $\pi$  سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ  $\pi > (1 + \pi) - \pi$   
اب فرض کرو کہ  $\pi$  لا انتہا بڑا ہوتا ہے لیکن  $\pi$  ثابت رہتا ہے  
تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا  
جاسکتا ہے اور چونکہ جم  $\frac{\pi}{2}$  کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$\text{جب } \pi = 0 \text{ (ا - } \frac{\pi^2}{4} \text{)} \dots \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \dots$$

جہاں  $\pi$  کی انتہائی قیمت ہے جبکہ  $\pi$  کو لا انتہا بڑا لیا جاتا ہے  
اور اسلئے  $\pi$  ایسا ہے کہ  $0 \leq \pi \leq 1$

اب  $\pi$  کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم جزو ضربی ا -  $\frac{\pi^2}{4}$  کو ایک کے

انتہا قریب لاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اسلئے جب  $\pi$  کے لئے لا انتہا ہی  
حاصل ضرب کے طور پر جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \pi = 0 \text{ (ا - } \frac{\pi^2}{4} \text{)} \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \left( \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \dots (1)$$

اسے اس دفعہ کی تحقیق "Schlomilch" سے منسوب ہے دیکھو اسکی کتاب

یہ قید کہ لامتناہی ہونا چاہئے سرکھا اٹھالی جاسکتی ہے۔  
۲۸۳ — اگر  $n$  جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم } \lambda = \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}}\right) \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم } \lambda = \left(1 - \frac{\lambda^2}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

جہاں  $m$  کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ  $\lambda^2 > \pi(1+m^2)$  اور طرہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم  $\lambda$  کے لئے لامتناہی حامل ضرب کے طور پر ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } \lambda = \left(1 - \frac{\lambda^2}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{n}\right) \dots \dots \dots (2)$$

۲۸۴ — ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مد نظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دیگے جو سیٹھ کی رگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب } \lambda = n \text{ جب } \frac{\lambda}{n} \text{ جم } \frac{\lambda}{n} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{جم } \lambda = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\frac{\lambda^2}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(846) کو جو  $n$  کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ  
۱۔  $\frac{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}}{\text{جب } \frac{\lambda^2}{n}} = \text{جم } \frac{\lambda^2}{n} \left(1 - \frac{\text{مس } \frac{\lambda^2}{n}}{\text{مس } \frac{\lambda^2}{n}}\right)$  کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

تحويل کر سکتے ہیں

$$\text{جب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} \text{ مس } \frac{1}{n} \prod_{r=1}^n \left( \frac{1}{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{r} (n-r)}$$

$$\text{جم } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} \prod_{r=1}^n \left( \frac{1}{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{r} (n-r)}$$

اب دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب 'ط' صفر سے  $\frac{1}{n}$  تک بڑھتا ہے جب ط گھٹتا ہے اور مس ط بڑھتا ہے اس لئے

$$\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) > \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) > \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$$

جہاں ہر جملہ کی مطلق قیمت یعنی چاہئے فرض کرو کہ  $n$  استعد بڑھنے کے  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$

تب  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$  اور  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$  جم  $\frac{1}{n}$  جہاں علامتیں ایسی یعنی چاہئیں کہ ہر جملہ اپنی حسابی قیمت رکھے۔ جب لاکے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n} \prod_{r=1}^n \left( \frac{1}{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{r} (n-r)}$$

$$\text{اور } \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \prod_{r=1}^n \left( \frac{1}{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{\frac{1}{r} (n-r)}$$

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{جم لا} > \prod_{r=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 (1-r^2)} \right)$$

$$\text{اور } \pm \text{جم لا} < \prod_{r=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 (1-r^2)} \right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ  $\frac{\text{لا}}{\pi} = 1 - \text{صن}$  جہاں صن ایک عدد ہے جو صفر کی طرف مستقر ہوتا ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا} \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 4} \right) \dots \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 \text{ن}^2} \right) (1 - \text{طنن})$$

$$\text{جم لا} = \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 4} \right) \dots \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 \text{ن}^2} \right) (1 - \text{طنن})$$

جہاں طنن، صفر کی طرف مستقر ہوتے ہیں جبکہ ن کو لا انتہا بڑا دیا جاتا ہے، پس اس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب لا} \prod_{r=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 (1-r^2)} \right) \left( 1 - \frac{\text{جب لا}^2}{\pi^2 \text{ن}^2} \right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم لا} \prod_{r=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2 (1-r^2)} \right) \left( 1 - \frac{\text{جب لا}^2}{\pi^2 \text{ن}^2} \right)$$

کو چون کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے غائب

$$\text{جب لا} = \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left( 1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left( 1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}} \right)$$

مائل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجہ حاصل ہوتے۔  
۲۸۵۔ اب ہم ملحق عدد ی = لا + خ ما کی صورت پر غور کریں گے  
دفعہ ۲۸۲ کے مطابق ہیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ی} = \text{ن جب ی} \frac{\text{جم ی}}{\text{ن}} \left( 1 - \frac{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right) \dots \left( 1 - \frac{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right)$$

$$\text{جہاں } \text{ب} = \left( 1 - \frac{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right) \dots \left( 1 - \frac{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور  $\frac{1}{2}(n-2)$  ہیں ب کی  
قیمت کے لئے عدد متعین کرنا ہے۔ فرض کرو کہ جب ی کا مقياس  
غ سے تعبیر ہوتا ہے تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق چونکہ کسی عددوں  
کے مجموعہ کا مقياس ان کے مقياسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے ہم  
دیکھتے ہیں کہ (ب - ۱) کا مقياس جملہ

$$1 - \left( 1 + \frac{\text{غ}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right) \dots \left( 1 + \frac{\text{غ}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب ی}^2 \frac{\text{ی}}{\text{ن}}} \right)$$

سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ  $\frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{m}$  اگر  $\frac{1}{m}$  کوئی مثبت (348) عدد ہو، اسلئے

$$(ج۔۱) \text{ کا مقیاس } > \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \right) = 1$$

$$\text{اور } > \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right\} = 1$$

$$\text{یا } > \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right\} = 1$$

$$\text{اسلئے (ج۔۱) کا مقیاس } > \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right) = 1$$

$$\text{یا } > \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right) = 1$$

پس (ج۔۱) کا مقیاس صفر اور  $\frac{1}{m}$  کے درمیان واقع ہے۔  
اب

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}$$

اسلئے  $\frac{1}{m}$  کی انتہائی قیمت  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m}$  ہے اور اسلئے (ج۔۱) کے

مقیاس کی انتہا جبکہ  $\frac{1}{m}$  کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے صفر اور  $\frac{1}{m}$  کے

درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ  $\frac{1}{m}$  کو کم کے کافی بڑا لینے سے

ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے  $\frac{1}{m}$  کو کافی

بڑا لینے سے (ج۔۱) کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے

ہیں۔ جب  $\frac{1}{m}$  کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو جب  $\frac{1}{m}$  کے جملہ کی



ہر جیب آخر لامر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے

$$\text{جب } Y = Y \quad (1 - \frac{Y^1}{\pi}) (\frac{Y^2}{\pi} - 1) (\frac{Y^3}{\pi} - 1) \dots \dots \dots$$

اسی طرح ضابطہ

$$\text{جم } Y = (1 - \frac{Y^1}{\pi}) (\frac{Y^2}{\pi} - 1) (\frac{Y^3}{\pi} - 1) \dots \dots \dots$$

کو ثابت کیا جاسکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استسحاق کی اس شرط کو جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے

$$\frac{Y^1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ اور } \frac{Y^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-r^2)^n} \text{ مستقیم ہیں۔ ان}$$

ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجہ جزو ضربی دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، چنانچہ

(۴۵)

$$\text{جب } L = L \quad (1 + \frac{L}{\pi}) (\frac{L}{\pi} - 1) (\frac{L}{\pi} + 1) (\frac{L}{\pi} - 1) \dots \dots \dots$$

$$\text{جم } L = (1 + \frac{L}{\pi}) (\frac{L}{\pi} - 1) (\frac{L}{\pi} + 1) (\frac{L}{\pi} - 1) \dots \dots \dots$$

جنگو شکلوں

$$\text{جب } L = L \quad (1 + \frac{L}{\pi}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{جم } L = (1 + \frac{L}{\pi}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1-r^2)^n} \dots \dots \dots (۴)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

ان آخری شکلوں میں مائل ضرب نیم مستقیم ہیں کیونکہ حسب ذیل مائل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

متع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  متع ہیں۔  
 کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت  
 کے حامل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو  
 بدل دینے سے حاصل ضرب کی قیمت بدلاؤ پڑتا ہے، ہم ضربوں (۳)  
 اور (۴) کو صحیح خیال کر سکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو  
 کہ رکی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی  
 لگی ہو ہے، اس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\text{جب } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ جم } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ نہ ہو}$$

کا اختصار سمجھنا چاہئے۔  
 ۲۸۷ — ویرسٹراس (Weierstrass) نے یہ ثابت کیا ہے کہ  
 متع حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \dots$$

مستدق بنایا جاسکتا ہے اگر اسکے ہر جزو ضربی کو ایک قوت نامجز ضربی  
 سے ضرب دیا جائے۔ چنانچہ حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \dots \right\}$$

مطلقاً مستدق ہے۔

چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۱)

(8)

$$\text{قو } \frac{y}{n} = 1 - \frac{y}{n} + \frac{y^2}{n^2} (1 + \epsilon_n)$$

جہاں  $\epsilon_n$  صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ  $n$  کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، اسلئے اگر وہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو  $\epsilon_n > 0$  کی تمام قیمتوں کے لئے جو وہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left\{ \left( \frac{y}{n} + 1 \right) \right\} \text{قو } \frac{y}{n} = \left( \frac{y}{n} + 1 \right) \left\{ 1 - \frac{y}{n} + \frac{y^2}{n^2} (1 + \epsilon_n) \right\}$$

$$= 1 - \frac{y^2}{n^2} (1 - \epsilon_n) + \frac{y^2}{n^2} (1 + \epsilon_n)$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\left\{ \frac{y^2}{n^2} - \epsilon_n \right\}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ  $n$  کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کے لئے

سلسلے  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$  مستدق ہیں اور  $\epsilon_n > 0$  سے  $\epsilon_n > 0$  + وہ۔ اسلئے بموجب اس سلسلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہو چکا ہے وہ لاستناہی مائل ضرب جسکی عام رقم

$$-1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2} + (1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2}) + (1 + \frac{y^2}{\pi^2 n^2})$$

$$1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2} + \frac{y^2}{\pi^2 n^2}$$

ہے مطلقاً مستقیم ہے۔

اگر ف (ی) سے مطلقاً مستقیم مائل صخر  $\frac{y}{\pi n}$   $(1 + \frac{y}{\pi n})$  تو  $\frac{y}{\pi n}$

کی انتہا اور ف (ی) سے  $\frac{y}{\pi n}$   $(1 - \frac{y}{\pi n})$  تو  $\frac{y}{\pi n}$  کی انتہا تبصیر ہو تو

$$f(y) = f(-y) \text{ جب } \frac{y}{\pi n}$$

اور پر کا یہ نتیجہ جملہ

$$f(y) = (1 - \frac{y}{\pi n}) (1 - \frac{y}{\pi n}) \dots (1 - \frac{y}{\pi n}) (1 + \frac{y}{\pi n}) (1 + \frac{y}{\pi n}) \dots$$

$$(1 + \frac{y}{\pi n}) \dots$$

کی قیمت محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ م اور ن کو لا انتہا بڑا بنایا گیا ہو لیکن اس طور پر کہ انکی نسبت ایک معین محدود آتھار کھے۔

اگر م، سلسلہ  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  کو تبصیر کرے تو

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f(y) = f(-y) \text{ تو } \frac{y}{\pi n} (s_n - s_m)$$

اب یہ بہت مشہور ہے کہ  $s_n$  - نوکرن کی انتہا جبکہ ن لا انتہا

محدود عدد  $0.5442156 \dots$  ہے جسکو  $\frac{1}{2}$  کا مستقل ہوتے ہیں اس لئے  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  کی انتہائی قیمت جبکہ  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  لاستناہی

ہوں لو کہ  $\frac{1}{2}$  کی انتہائی قیمت ہے۔ پس

$$\text{ہذا فہ (ی) = ک} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ جب ی}$$

جہاں ک = ہذا  $\frac{1}{2}$  اور ہذا فہ (ی) کی قیمت = جب ی صرف

اس وقت جبکہ  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  مساوی ہوتے ہوئے لاستناہی ہو جائیں۔

۲۸۸ - جم لا کے ضابطہ (۲) یا (۴) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ جم لا = جب  $\frac{1}{2}$  لا کے ذریعہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{2} \text{ جب لا} = \frac{1}{2} \text{ لا} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

شمار کنندہ کے وہ اجزائے ضربی جنکے لئے رجعت ہے نسب نما کے اجزائے ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ

کے حاصل ضرب کو  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  کی انتہا اور نسب نما کے حاصل ضرب

کو  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  کی انتہا خیال کریں جبکہ  $\frac{1}{2}$  لاستناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{2} \text{ جم لا} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

جو (۲) یا (۴) کے مثل ہے۔ حاصل ضربوں کے استمداق کی شرط سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں  $\frac{1}{2}$  کی بجائے  $\frac{1}{2}$  لیتے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ  $\frac{1}{2}$  کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ — ضابطوں جب لا = جم  $(\frac{1}{r} - \pi - \frac{1}{r})$  جم لا = جب  $(\frac{1}{r} - \pi - \frac{1}{r})$  کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے یا اس کے بالعکس۔ ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{\infty} \left( \frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi(1-r^2)} + 1 \right) = \prod_{\infty} \left( \frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi(1-r^2)} + 1 \right)$$

$$\left( \frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi} - 1 \right) \prod_{\infty} \frac{r^2}{1-r^2} =$$

جہاں جزو ضربی لا 'ر' کے جواب میں ہے۔ لا = کہنے 'جب لا کی نہ تھا

لئے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً  $\prod_{\infty} \frac{r^2}{1-r^2} = 1$  پس

$$\text{جب لا} = \prod_{\infty} \left( \frac{\frac{1}{r} - \pi}{\pi} - 1 \right)$$

۲۹۰ — جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے ان کے دورنی (Periodic) ہونیکی خاصیت ظاہر ہو جو تقاطعوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے

$$\text{فرض کرو } f(\frac{1}{r}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right)$$

تو

$$f(\frac{1}{r}) = \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \dots$$

$$\left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} - 1 \right) \dots \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} - 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right)$$

$$= \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \dots \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} - 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{r}}{\pi} - 1 \right) \dots$$

$$\frac{1+n}{n} \left( \frac{l}{\pi(1-n)} - 1 \right) \dots\dots$$

$$= \frac{\pi(1+n)+l}{n-\pi} \text{ ف (لا) }'$$

اب جبکہ  $n$  کو لا اتھا بڑا دیا جاتا ہے تو نہاں  $(\pi+l) =$  نہاں  $(لا)$  جو مساوات جب  $(\pi+l) =$  جب لا ہے۔ اسی طرح ضابطہ  $(۴)$  کو ایسی شکل میں رکھا جاسکتا ہے کہ اس سے خاصیت جم  $(\pi+l) =$  جم لا کا اظہار ہو۔

تفاعل جب لا معدوم ہوتا ہے جبکہ لا  $= \pi \pm \pi \pm \pi \dots\dots$

اور یہ قیمتیں ضابطہ  $(۳)$  کے اجزائے ضربی لا  $\pm \frac{l}{\pi}$ ،  $\pm \frac{l}{\pi}$ ،  $\dots\dots$  کے

جواب میں ہیں، نیز دفعہ ۲۳۵ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ لا کی کسی خیالی قیمت کے لئے جب لا معدوم نہیں ہوتا، اسی طرح اگر یہ مان لیا جائے کہ جب لا کو لاستناہی حاصل ضرب

$$\frac{1}{\pi} (لا-۱) (لا-ب) (لا-ج) \dots\dots\dots$$

کی شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے تو لا  $\pm \pi \pm \pi \dots\dots$  کی قیمتیں لازماً صفر  $\pi$  حاصل کی جاتی ہے اور مسئلہ نہاں جب لا  $=$  کو استعمال کر کے ضابطہ  $(۱)$

یا  $(۳)$  حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن اس ضابطہ کے اس ثبوت کی دراصل کوئی قدر و قیمت نہیں کیونکہ بغیر ثبوت کے ہمیں یہ ماننے کا کوئی حق نہیں ہے کہ جب لا مطلوبہ شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۹۱ — ضابطے  $(۱)$  اور  $(۲)$  خیالی دلیل خراما کی صورت میں

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے۔ اس صورت میں  
جیزما کے لئے لاستناہی مائل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جیزما} = \left(\frac{1}{r_1 \pi} + 1\right) \left(\frac{1}{r_2 \pi} + 1\right) \left(\frac{1}{r_3 \pi} + 1\right) \dots (5)$$

$$\text{جیزما} = \left(\frac{1}{r_1 \pi} + 1\right) \left(\frac{1}{r_2 \pi} + 1\right) \left(\frac{1}{r_3 \pi} + 1\right) \dots (6)$$

(353)

یوں نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متاثرہ

$$\left\{ \frac{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right\} \frac{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

کی مدد سے سب سے اول مائل کیا تھا۔ رکھو  $1 + \frac{1}{m}$  تو یہ متاثرہ ہو جاتی ہے

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}$$

اب اگر  $m$  کو لا انتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متاثرہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{n} (1 - \frac{1}{m}) = \frac{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

جو ضابطہ (۵) ہے۔ انتہا کی اس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح حریک تحقیقات کی

ضرورت ہے۔ ضابطہ (۱) لا کو خ لا میں تبدیل کر کے اخذ کیا گیا تھا اور اسی طرح

ضابطہ (۲) اور (۶) سے  $1 + \frac{1}{m}$  کے ان جملوں سے مائل کئے گئے تھے جو ابوائے ضرب



میں ہیں۔

## مثالیں

۲۹۲۔ (۱)  $\pi$  کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔  
جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا  $\frac{1}{p} = \pi$  رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$\left(\frac{1}{2(n+1)} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2n} - 1\right) \left(\frac{1}{2n-1} - 1\right) \frac{\pi}{2} = 1$$

مائل ہوتا ہے جبکہ  $n$  بڑا ہو۔ اس کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{(1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))} = \sqrt{\frac{1}{2} \pi (1 + \frac{1}{2n})}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲)۔ جنرما۔ جم ع۔ جم لا۔ جم ع۔ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جنرما۔ جم ع = ۲ جب  $\frac{1}{p} = (ع + خ)$  جب  $\frac{1}{p} = (ع - خ)$

$$\left\{ \frac{(ع + خ)^2}{2 \pi^2 n^2} - 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} (ع + خ)^2 \right) =$$

$$\left\{ \frac{(ع - خ)^2}{2 \pi^2 n^2} - 1 \right\} \times$$

اور ما = . رکھنے سے

$$1 - جم ع = \frac{1}{2} ع^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2 \pi^2 n^2} - 1 \right)$$

پس

$$\frac{جم ع - جنرما}{جم ع} = \left( \frac{1}{2} (ع + خ)^2 \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2 \pi^2 n^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2 \pi^2 n^2} - 1 \right) \times$$

$$\left( \frac{1}{2 \pi^2 n^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2 \pi^2 n^2} + 1 \right) \times$$

اس لئے

$$\left\{ \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} + 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} + 1 \right) = 1 \text{ جب } 2 = 1 \text{ جم}$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} + 1 \right\} \times$$

(854)

اس میں ما کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\left\{ \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} - 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} - 1 \right) = 1 \text{ جب } 2 = 1 \text{ جم}$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} - 1 \right\} \times$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^5} + \frac{1}{\pi^7} + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} - \pi \left( \frac{1}{\pi^3} \times \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \pi^2 n^2} - 1 \right\} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \pi^2 n^2) = (1 + \pi^2 n^2) \text{ جب}$$

اس لئے لوکار تم لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

لوک (جب لا جزما + خ جم لا جزما) = لوک (لا + خ ما)

$$+ \frac{1}{\pi^3} - \frac{1}{\pi^5} + \frac{1}{\pi^7} - \frac{1}{\pi^9} + \dots$$

اس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{\pi} - \pi \left( \frac{1}{\pi^3} \times \frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} - \pi \left( \frac{1}{\pi^3} \times \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} = 1 = \pi$$

فرض کرو



(355)

(۳) اگر  $n = 2$  کہ  $f = \dots$  فیر تو کہ  $n = (1 - 2) = 1$  کہ  
 (۴) اگر  $n$  کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو کہ  $n =$   
 اب یہ واقعہ کہ کہ کی ان قیمتوں کے ساتھ جو حسب استخراج  
 بالا مائل ہوتی ہیں سلسلہ

ح کہ لو کہ  $(1 + y)$

ای  $| > 1$  کے لئے مستحق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جاسکتا ہے۔  
 پس  $y$  کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ  $| > 1$  ا قوت غماق مائل  
 ہوتی اس لاستناہی مائل ضرب

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + y^n) = (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) \dots$   
 ہے تبیر ہوتا ہے، یا چونکہ  $(1 - y)(1 + y)(1 + y^2) \dots$  اسلئے مائل  
 تقسیم سے مائل ہوتا ہے

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + y^n}{1 - y^n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + y^n}{1 - y^n} \right) \quad | > 1$$

جہاں  $f$ ، مہ غیر مساوی طاق مفردوں کا مائل ضرب ہے اور  $f$  کی  
 سب قیمتیں جو اس شکل کی ہیں لگی ہیں۔

ماس، ماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلہ

$$293 - \text{چونکہ جب } y = 1 \text{ } \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{y^n}{n} \right)$$

اس لئے اگر  $y$ ، کا ضعف نہیں ہے تو



پس اب

$$\frac{1}{5} \text{ لوک جو جب (ی 4) } \frac{1}{5}$$

ہے مستدق ہے۔ اگر  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  کافی طور پر چھوٹا ہو تو اس عام رقم کا مقیاس

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} (1 + \dots) > \frac{1}{2}$$

اب  $|1 - \pi| \leq |1 - \pi| \leq |1 - \pi|$  اسلئے

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

جہاں  $n < 1 + \dots$  پس یہ مستند ہوتا ہے کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم

(357)

$\frac{1}{2}$  ہے مستدق ہے۔ اسی طرح وہ سلسلہ جس کی عام

$\frac{1}{2}$  ہے مستدق ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس سلسلہ کے مجموعہ کا مقیاس جسکی

عام رقم  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہے عدد

$\frac{1}{2} = (1 + \dots)$  سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں  $(1 + \dots)$  ایک

مثبت عدد ہے جو صرف  $y$  پر منحصر ہے، یہ مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جبکہ  $\frac{1}{2}$  کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

چونکہ  $\frac{\text{جب (ی+۱۰)}}{\text{جب ی}} = \text{جم ۱۰} + \text{جب ۱۰ مم ی} = \text{۱۰ مم ی (۱+۱۰)}$

یہاں اضا' نے کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے، اسلئے

$$\frac{1}{a} \text{ لوک } \frac{1}{b} = \frac{(1+a)(1+b)}{1+ab} = \frac{1}{1+ab} \text{ لوک } \{ (1+a)(1+b) \}$$

$$= ممی (۱+ضأ) (۱+ضأ)$$

جہاں انکا،<sup>۷۷</sup> کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ پس

ہنسیا =  $\frac{1}{100}$  لوک جب (ی + ۱۰۰) = مم ی

اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب 'ی' کوئی حقیقی یا ملفف عدد

ہو جو ۱۱ کا نتیجہ عددی ضعیف نہیں ہے تو مری اس مستبدق سلسلہ

$$(\zeta) \dots + \frac{1}{\pi^2 - 5} + \frac{1}{\pi^2 + 5} + \frac{1}{\pi - 5} + \frac{1}{\pi + 5} + \frac{1}{5}$$

$$(A) \dots\dots\dots \frac{1}{\pi^2 u - 1} \sum_{v=0}^{\infty} u^v + \frac{1}{u} \quad \text{A'}$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالانیم مستحق ہے اور شکل (۸) میں

وہ مطلقاً مستحق ہے، بجزی =  $\pi \pm 1$ ،  $\pi \pm 2$ ، ... کے اور ان قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ متع ہے۔

مندرجہ ذیل تحقیق کی ضرورت جاننے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ

اگر  $(y)$  'مستحق سلسلہ'  $e_1(y) + e_2(y) + \dots + e_n(y)$  کا مجموعہ ہو تو ہمیں یہ مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے کہ

$$\frac{f(y) - (m+y)}{m} = \frac{f(y) - (m+y)}{m}$$



فرض کرو کہ اس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد بام (ی) ہے تو  
 ف (ی) = (ی) ۶ + (ی) ۶ + (ی) ۶ + ... + (ی) ۶ + بام (ی) ۶  
 ف (ی + م) = (ی + م) ۶ + (ی + م) ۶ + (ی + م) ۶ + ... + (ی + م) ۶ + بام (ی + م)  
 اسلئے نہیں  $\frac{ف (ی + م) - ف (ی)}{م} = \frac{بام (ی + م) - بام (ی)}{م}$   
 نہیں  $\frac{بام (ی + م) - بام (ی)}{م}$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے بام (ی) بام (ی + م) لا انتہا  
 چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نکلنا ضروری  
 نہیں کہ نہیں  $\frac{بام (ی + م) - بام (ی)}{م}$  بھی لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

صرف اس وقت جبکہ یہ انتہا یعنی نہیں  $\frac{بام (ی + م) - بام (ی)}{م}$  لا انتہا  
 چھوٹی ہو شوق سلسلہ کو ف (ی) کے شوق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جاسکتا  
 ہے۔ مثلاً اگر بام (ی) کی شکل  $\frac{۱}{م}$  جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$\frac{بام (ی + م) - بام (ی)}{م} = ۱ \text{ جم م ی}$$

جو صفر کی طرف مستدق نہیں ہوتا جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن  
 قیمتوں  $\pm ۱$  کے درمیان اہتر از کرتا ہے۔

۲۹۴ - جملہ

$$\text{جم ی} = (۱ - \frac{۱}{۲\pi}) (\frac{۱}{۲\pi} - ۱) (\frac{۱}{۲\pi} - ۱) \dots$$

سے دفعہ ماسبق کے مائل طریقہ استعمال کر کے ہم لاستناہی سلسلہ

$$- \dots + \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} - y} + \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} + y} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} - y} + \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} + y} = \text{مس ی}$$

$$(9) \dots + \frac{1}{\pi(1-m^2)^{\frac{1}{4}} - y} + \frac{1}{\pi(1-m^2)^{\frac{1}{4}} + y} +$$

$$\dots + \frac{1}{\pi^2(1-m^2)^{\frac{1}{4}} - y} + \frac{1}{\pi^2(1-m^2)^{\frac{1}{4}} + y} = \text{مس ی} = 8 \text{ ی}$$

مائل کرتے ہیں۔ سلسلہ (۹) نیم مستحق ہے لیکن سلسلہ (۱۰) مطلقاً مستحق

ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بجز  $\pm \pi^{\frac{1}{4}} \pm \pi^{\frac{3}{4}} \pm \pi^{\frac{5}{4}} \dots$  کے۔

۲۹۵ — ضابطوں قم ی = مم  $\frac{1}{4}$  ی - مم ی کیا قم ی = مم  $\frac{1}{4}$  ی

+ مم  $\frac{1}{4}$  ی کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں ماس التماموں کی بجائے ان کے سلسلے درج

کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[ \dots + \frac{2}{\pi^2 - y} + \frac{2}{\pi^2 + y} + \frac{2}{\pi^2 - y} + \frac{2}{\pi^2 + y} + \frac{2}{y} \right]$$

$$- \left[ \dots + \frac{1}{\pi^2 - y} + \frac{1}{\pi^2 + y} + \frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{y} \right]$$

پس قم ی

$$\dots + \frac{1}{\pi^2 - y} - \frac{1}{\pi^2 + y} - \frac{1}{\pi^2 - y} + \frac{1}{\pi^2 + y} + \frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} - \frac{1}{y} =$$

(۱۱) \dots\dots\dots

یا ق م ی =  $\frac{1}{ی} + \frac{۲}{۱-۲ی}$  ..... (۱۲)

ضابطہ (۱۱) میں ی کو ی +  $\frac{۱}{۲}$  میں تبدیل کر دو تو

قط ی =  $(\frac{۱}{ی + \frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{ی - \frac{۱}{۲}}) - (\frac{۱}{ی + \frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{ی - \frac{۱}{۲}})$

..... (۱۳)

یا قط ی =  $\frac{۲(۱-۲ی)}{۲ی-۱}$  ..... (۱۴)

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ ر بڑا ہو قیمت  $\frac{۱}{۱-۲ی}$  کے قریب آتی ہے اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستحق ہے۔

ماس التماہی اور ماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں

جب (ی + ۱) اور جب ی کے لئے لاستناہی حاصل ضربوں کے جو جملے ہیں انکو استعمال کر دو تو عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

جب (ی + ۱) =  $\frac{۱}{ی} + \frac{۲}{۱-۲ی}$  (جب ی =  $\frac{۱}{۲}$ )

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے ہے کی تو توں میں پھیلا یا جاسکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل جم + جب ہم ی میں رکھیں تو کی تو توں میں پھیلانے اور مساوات کی طرفین میں کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

م م ی =  $\frac{۱}{ی} + \frac{۲}{۱-۲ی} + \frac{۲}{۱-۲ی} + \dots$  (۸)

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لاستناہی حاصل ضرب جیسے سر معمول عمل ضرب حاصل شدہ لاستناہی سلسلے ہیں کی معودی تو توں کے ایک سلسلہ میں



چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔ اب اگر ی کا مقیاس  $\pi$  سے کم ہو تو

$$\frac{1}{\pi - y} = \frac{1}{\pi} + \frac{y}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^3} + \dots + \frac{y^{n-1}}{\pi^n} + \dots$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ ی کا مقیاس  $\pi$  سے کم ہے تو کسروں  $\frac{1}{\pi - y}$  میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر پھیلا سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستند ہے ہم نتیجہ کو ی کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$m = \frac{1}{\pi} - \frac{y}{\pi^2} + \left(\frac{1}{\pi} + \dots + \frac{1}{\pi^{n-1}} + \frac{1}{\pi^n}\right) \frac{y^2}{\pi^3} - \dots$$

$$- \dots - \left(\frac{1}{\pi^n} + \dots + \frac{1}{\pi^{2n-2}} + \frac{1}{\pi^{2n-1}} + \frac{1}{\pi^{2n}}\right) \frac{y^{2n-1}}{\pi^{2n+1}} - \dots$$

فرض کرو کہ  $m$  سے مستند سلسلہ

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \dots + \frac{1}{\pi^{n-1}} + \frac{1}{\pi^n} + \dots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے تب  $m = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \dots + \frac{1}{\pi^{n-1}} + \frac{1}{\pi^n} + \dots$   
 +  $m$  جہاں  $m$  ایک عدد ہے جو  $m$  کو کافی بڑا لینے سے  
 استقدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔

$$تب \quad m = \frac{1}{\pi} - \frac{y}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^3} - \dots - \frac{y^{2n-1}}{\pi^{2n+1}} + \dots$$

$$+ \text{ببر} + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ  $\text{صم} < \text{صم} < \text{صم} < \dots$  پس

$$\dots + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots$$

$$\text{کا مقیاس} > \text{صم} \left( \frac{۱}{۲\pi} + \frac{۱}{۲\pi} + \dots \right)$$

خلوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستحق ہے کیونکہ مق  $۲ > \pi$  اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے  $\frac{۲}{۲\pi} \text{صم}$  کے مقیاس کو اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ پس م م کے لئے یہ لاشتا ہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{م م} = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} - \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} - \dots - \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} \dots (۱۵)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ مق  $۲ > \pi$  اور بالخصوص  $\pi \pm$  کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے سلسلہ

$$\text{مس ی} = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو متناظر مس ی = م م - ۲ م م کے ذریعہ بھی (۱۵) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots + \frac{۲}{۲\pi} \text{صم} + \dots (۱۶)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس  $\frac{1}{\pi}$  سے کم ہو اور بالخصوص  $\pm \frac{1}{\pi}$  کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{5}{1} \times \frac{1-2}{1} + \frac{5}{2} \times \frac{1-2}{2} + \frac{5}{3} (1-2) + \frac{1}{5} = 5 \text{ قم}$$

362)

اب فرض کرو کہ ص سے لاستناہی سلسلہ

$$\dots - \frac{1}{1+52} + \frac{1}{1+52} - \frac{1}{1+52} + \dots$$

کا مجموعہ تبصیر ہوتا ہے، اور فرض کرو پہلی م رقموں کے بعد کا باقی ص ہے، تب

$$\text{قطی} = \frac{1}{11} \text{ص}_1 + \frac{1}{11} \text{ص}_2 + \dots + \frac{1}{11} \text{ص}_n + \dots$$

$$+ \text{ب}_1 + \frac{1}{11} \text{ص}_2 + \frac{1}{11} \text{ص}_3 + \dots$$

فرض کرو کہ عددوں ص، ص، ص، میں سے بڑے سے بڑا عدد ص

$$\text{ہے تو } \frac{1}{11} \text{ص}_1 + \frac{1}{11} \text{ص}_2 + \dots \text{ کا مقیاس، سلسلہ}$$

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11} | \text{ی} | + \frac{1}{11} | \text{ی} | + \dots$$

کے مجموعے کے ص گنا سے کم ہے، یہ آخری سلسلہ مستحق ہے کیونکہ ص کا مقیاس بموجب فرض  $\frac{1}{11}$  سے کم ہے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اس سلسلہ کا باقی جو ہم نے قطی کے لئے حاصل کیا ہے ایک عدد ہے جس کا مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جسے م بڑھتا ہے اس لئے قطی کے لئے لاستناہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{قطی} = \frac{1}{11} \text{ص}_1 + \frac{1}{11} \text{ص}_2 + \frac{1}{11} \text{ص}_3 + \dots (18)$$



جو درست ہے اگر مقلی  $\frac{1}{4} - \pi$ ۔

۲۹۸ — جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تعامل  $\frac{1}{1}$  کو

جہاں  $\frac{1}{1}$  اپنی صد قیمت رکھتا ہے شکل

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \frac{1}{1024} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں  $\frac{1}{1}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{16}$ ،  $\frac{1}{32}$ ،  $\frac{1}{64}$ ،  $\frac{1}{128}$ ،  $\frac{1}{256}$ ،  $\frac{1}{512}$ ،  $\frac{1}{1024}$ ،  $\frac{1}{2048}$ ،  $\frac{1}{4096}$ ،  $\frac{1}{8192}$ ،  $\frac{1}{16384}$ ،  $\frac{1}{32768}$ ،  $\frac{1}{65536}$ ،  $\frac{1}{131072}$ ،  $\frac{1}{262144}$ ،  $\frac{1}{524288}$ ،  $\frac{1}{1048576}$ ،  $\frac{1}{2097152}$ ،  $\frac{1}{4194304}$ ،  $\frac{1}{8388608}$ ،  $\frac{1}{16777216}$ ،  $\frac{1}{33554432}$ ،  $\frac{1}{67108864}$ ،  $\frac{1}{134217728}$ ،  $\frac{1}{268435456}$ ،  $\frac{1}{536870912}$ ،  $\frac{1}{1073741824}$ ،  $\frac{1}{2147483648}$ ،  $\frac{1}{4294967296}$ ،  $\frac{1}{8589934592}$ ،  $\frac{1}{17179869184}$ ،  $\frac{1}{34359738368}$ ،  $\frac{1}{68719476736}$ ،  $\frac{1}{137438953472}$ ،  $\frac{1}{274877906944}$ ،  $\frac{1}{549755813888}$ ،  $\frac{1}{1099511627776}$ ،  $\frac{1}{2199023255552}$ ،  $\frac{1}{4398046511104}$ ،  $\frac{1}{8796093022208}$ ،  $\frac{1}{17592186044416}$ ،  $\frac{1}{35184372088832}$ ،  $\frac{1}{70368744177664}$ ،  $\frac{1}{140737488355328}$ ،  $\frac{1}{281474976710656}$ ،  $\frac{1}{562949953421312}$ ،  $\frac{1}{1125899906842624}$ ،  $\frac{1}{2251799813685248}$ ،  $\frac{1}{4503599627370496}$ ،  $\frac{1}{9007199254740992}$ ،  $\frac{1}{18014398509481984}$ ،  $\frac{1}{36028797018963968}$ ،  $\frac{1}{72057594037927936}$ ،  $\frac{1}{144115188075855872}$ ،  $\frac{1}{288230376151711744}$ ،  $\frac{1}{576460752303423488}$ ،  $\frac{1}{1152921504606846976}$ ،  $\frac{1}{2305843009213693952}$ ،  $\frac{1}{4611686018427387904}$ ،  $\frac{1}{9223372036854775808}$ ،  $\frac{1}{18446744073709551616}$ ،  $\frac{1}{36893488147419103232}$ ،  $\frac{1}{73786976294838206464}$ ،  $\frac{1}{147573952589676412928}$ ،  $\frac{1}{295147905179352825856}$ ،  $\frac{1}{590295810358705651712}$ ،  $\frac{1}{1180591620717411303424}$ ،  $\frac{1}{2361183241434822606848}$ ،  $\frac{1}{4722366482869645213696}$ ،  $\frac{1}{9444732965739290427392}$ ،  $\frac{1}{18889465931478580854784}$ ،  $\frac{1}{37778931862957161709568}$ ،  $\frac{1}{75557863725914323419136}$ ،  $\frac{1}{151115727451828646838272}$ ،  $\frac{1}{302231454903657293676544}$ ،  $\frac{1}{604462909807314587353088}$ ،  $\frac{1}{1208925819614629174706176}$ ،  $\frac{1}{2417851639229258349412352}$ ،  $\frac{1}{4835703278458516698824704}$ ،  $\frac{1}{9671406556917033397649408}$ ،  $\frac{1}{19342813113834066795298816}$ ،  $\frac{1}{38685626227668133590597632}$ ،  $\frac{1}{77371252455336267181195264}$ ،  $\frac{1}{154742504910672534362390528}$ ،  $\frac{1}{309485009821345068724781056}$ ،  $\frac{1}{618970019642690137449562112}$ ،  $\frac{1}{1237940039285380274899124224}$ ،  $\frac{1}{2475880078570760549798248448}$ ،  $\frac{1}{4951760157141521099596496896}$ ،  $\frac{1}{9903520314283042199192993792}$ ،  $\frac{1}{19807040628566084398385987584}$ ،  $\frac{1}{39614081257132168796771975168}$ ،  $\frac{1}{79228162514264337593543950336}$ ،  $\frac{1}{158456325028528675187087900672}$ ،  $\frac{1}{316912650057057350374175801344}$ ،  $\frac{1}{633825300114114700748351602688}$ ،  $\frac{1}{1267650600228229401496703205376}$ ،  $\frac{1}{2535301200456458802993406410752}$ ،  $\frac{1}{5070602400912917605986812821504}$ ،  $\frac{1}{10141204801825835211973625643008}$ ،  $\frac{1}{20282409603651670423947251286016}$ ،  $\frac{1}{40564819207303340847894502572032}$ ،  $\frac{1}{81129638414606681695789005144064}$ ،  $\frac{1}{162259276829213363391578010288128}$ ،  $\frac{1}{324518553658426726783156020576256}$ ،  $\frac{1}{649037107316853453566312041152512}$ ،  $\frac{1}{1298074214633706907132624082305024}$ ،  $\frac{1}{2596148429267413814265248164610048}$ ،  $\frac{1}{5192296858534827628530496329220096}$ ،  $\frac{1}{10384593717069655257060992658440192}$ ،  $\frac{1}{20769187434139310514121985316880384}$ ،  $\frac{1}{41538374868278621028243970633760768}$ ،  $\frac{1}{83076749736557242056487941267521536}$ ،  $\frac{1}{166153499473114484112975882535043072}$ ،  $\frac{1}{332306998946228968225951765070086144}$ ،  $\frac{1}{664613997892457936451903530140172288}$ ،  $\frac{1}{1329227995784915872903807060280344576}$ ،  $\frac{1}{2658455991569831745807614120560689152}$ ،  $\frac{1}{5316911983139663491615228241121378304}$ ،  $\frac{1}{10633823966279326983230456482242756608}$ ،  $\frac{1}{21267647932558653966460912964485513216}$ ،  $\frac{1}{42535295865117307932921825928971026432}$ ،  $\frac{1}{85070591730234615865843651857942052864}$ ،  $\frac{1}{170141183460469231731687303715884105728}$ ،  $\frac{1}{340282366920938463463374607431768211456}$ ،  $\frac{1}{680564733841876926926749214863536422912}$ ،  $\frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824}$ ،  $\frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648}$ ،  $\frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296}$ ،  $\frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592}$ ،  $\frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184}$ ،  $\frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368}$ ،  $\frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736}$ ،  $\frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472}$ ،  $\frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944}$ ،  $\frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888}$ ،  $\frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776}$ ،  $\frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552}$ ،  $\frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104}$ ،  $\frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208}$ ،  $\frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416}$ ،  $\frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832}$ ،  $\frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664}$ ،  $\frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328}$ ،  $\frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656}$ ،  $\frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312}$ ،  $\frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624}$ ،  $\frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248}$ ،  $\frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496}$ ،  $\frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992}$ ،  $\frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984}$ ،  $\frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968}$ ،  $\frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936}$ ،  $\frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872}$ ،  $\frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744}$ ،  $\frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$ ،  $\frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976}$ ،  $\frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952}$ ،  $\frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904}$ ،  $\frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808}$ ،  $\frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616}$ ،  $\frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232}$ ،  $\frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}$ ،  $\frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928}$ ،  $\frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}$ ،  $\frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712}$ ،  $\frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424}$ ،  $\frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848}$ ،  $\frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696}$ ،  $\frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392}$ ،  $\frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784}$ ،  $\frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}$ ،  $\frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136}$ ،  $\frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}$ ،  $\frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544}$ ،  $\frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}$ ،  $\frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176}$ ،  $\frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352}$ ،  $\frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704}$ ،  $\frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408}$ ،  $\frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}$ ،  $\frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632}$ ،  $\frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264}$ ،  $\frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528}$ ،  $\frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056}$ ،  $\frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112}$ ،  $\frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}$ ،  $\frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448}$ ،  $\frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896}$ ،  $\frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792}$ ،  $\frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584}$ ،  $\frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168}$ ،  $\frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336}$ ،  $\frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672}$ ،  $\frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344}$ ،  $\frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688}$ ،  $\frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}$ ،  $\frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752}$ ،  $\frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504}$ ،  $\frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008}$ ،  $\frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016}$ ،  $\frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032}$ ،  $\frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064}$ ،  $\frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128}$ ،  $\frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256}$ ،  $\frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512}$ ،  $\frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024}$ ،  $\frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048}$ ،  $\frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096}$ ،  $\frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192}$ ،  $\frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384}$ ،  $\frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768}$ ،  $\frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536}$ ،  $\frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072}$ ،  $\frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144}$ ،  $\frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288}$ ،  $\frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576}$ ،  $\frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152}$ ،  $\frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304}$ ،  $\frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608}$ ،  $\frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216}$ ،  $\frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432}$ ،  $\frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864}$ ،  $\frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728}$ ،  $\frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456}$ ،  $\frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912}$ ،  $\frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824}$ ،  $\frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648}$ ،  $\frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296}$ ،  $\frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592}$ ،  $\frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184}$ ،  $\frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368}$ ،  $\frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736}$ ،  $\frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472}$ ،  $\frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944}$ ،  $\frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888}$ ،  $\frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776}$ ،  $\frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552}$ ،  $\frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104}$ ،  $\frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208}$ ،  $\frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416}$ ،  $\frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832}$ ،  $\frac{1}{11$







$$+ \text{م} \backslash \text{ن}^{19} \times 3651 \dots \dots \dots$$

$$+ \text{م} \backslash \text{ن}^{21} \times 205 \dots \dots \dots$$

$$+ \text{م} \backslash \text{ن}^{23} \times 25 \dots \dots \dots$$

$$+ \text{م} \backslash \text{ن}^{25} \times 5 \dots \dots \dots$$

$$= \text{م} (\text{م} \backslash \text{ن} \times 90)$$

$$\text{ن} \backslash \text{م} \times 543441944234581$$

$$- 2 \text{م} \text{ن} \backslash (\text{ن} - \text{م}) \times 33183098861834$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن} \times 5205288892125$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^3 \times 506551044882$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^5 \times 3250292552$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^7 \times 202491060$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^9 \times 12266524$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^{11} \times 42959$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^{13} \times 34594$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^{15} \times 2949$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^{17} \times 185$$

$$- \text{م} \backslash \text{ن}^{19} \times 11$$

ان جملوں میں رقموں  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$  کو جو ضابطہ (۱۰) اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول محسوب کر لیا جاتا ہے، تب ان رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ مستحق ہوتے ہیں۔  
یہ سلسلے یو لری Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں جس میں انگوائٹس نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے۔

## لوکارتمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

۳۰۰۔ دفعہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھانے کے ہیں کہ

$$\text{جب } y = 1 \text{، } \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right)$$

$$\text{جم } y = 1 \text{، } \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right)$$

جہاں طم طم ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس م کو کافی بڑا لینے سے اتنے چھوٹے بنائے جاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اب لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک جیب } y = 1 \text{، } \text{لوک } y + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right)$$

$$\text{لوک جم } y = 1 \text{، } \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) + \dots$$

$$+ \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{y^2}{m^2}\right)$$

پہلی صورت میں مان لوکہ ای |  $\pi > \pi$  اور دوسری صورت میں  $\pi > \pi$  تاکہ یہ لوکار تم ی کی قوتوں میں مطلقاً مستحق سلسلوں میں پھیلائے جاسکیں تب ان لوکار تموں کو پھیلائے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک جب ی} = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \dots = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

لوک (۱- طم)

$$\text{لوک جم ی} = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \dots = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

لوک (۱- طم)

اب

$$\dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \dots$$

$$\left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \frac{1}{n^2} + \left( \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) =$$

اس لئے

$$\frac{1 - \pi^2}{\pi^2} = \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(386)

$$\text{لوک جب ی} = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

لوک (۱- طم)

$$\text{لوک جم ی} = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \dots = \frac{\pi^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

لوک (۱- طم)

جہاں سلسلوں

$$\dots + \frac{1}{\omega^2_3} + \frac{1}{\omega^2_2} + \dots + \frac{1}{\omega^2_2} + \frac{1}{\omega^2_1}$$

کی م رقموں کے بعد کے باقی صفر، ضم ہیں۔

$$\sum \frac{y^2}{\omega^2_n} \text{ صفر کا مقیاس } \sum \frac{1}{\omega^2_n} \text{ سے کم ہے اور}$$

$$\sum \frac{y^2}{\omega^2_n} \text{ صفر کا مقیاس } \sum \frac{1}{\omega^2_n} \text{ سے کم ہے جہاں}$$

صفر، صفر علی الترتیب صفر، صفر کی بڑی سے بڑی قیمتیں ہیں۔ پس

$$\text{لوک جب ی} = \sum \frac{y^2}{\omega^2_n} \text{ صفر}$$

$$\text{لوک جم ی} = \sum \frac{1}{\omega^2_n} \text{ صفر}$$

$$\text{اب چونکہ صفر} = \frac{\omega^2_1 - \omega^2_2}{\omega^2_n} \text{ جس لئے لوک جب ی}$$

لوک جم ی کے لئے حسب ذیل لا متناہی سلسلے مائل ہوتے ہیں

$$\text{لوک جب ی} = \frac{1}{\omega^2_1} - \frac{1}{\omega^2_2} + \frac{1}{\omega^2_3} - \frac{1}{\omega^2_4} + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{\omega^2_n} + \dots (۲۳)$$



جہاں مقی  $\pi >$

$$\text{لوک جم ی} = ۲ - \frac{۱}{۲} \frac{ب}{۱} (۱ - ۲) - \frac{۱}{۲} \frac{ب}{۲} (۱ - ۲) - \dots$$

$$- \frac{۱}{۲} \frac{ب}{۳} (۱ - ۲) - \dots - \frac{۱}{۲} \frac{ب}{۲۳} (۱ - ۲) - \dots$$

جہاں مقی  $\pi > \frac{۱}{۲}$

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کی پہلی چند رتیں ہیں

$$\text{لوک جب ی} = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۸۰} - \frac{۱}{۲۸۳۵} - \dots$$

$$\text{لوک جم ی} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۴۵} - \dots$$

اسلے نیز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۲۸۳۵} + \dots$$

(367)

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کو لوکار تھی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکار تھی

لوک  $(\frac{۱}{۲} - ۱)$ ، لوک  $(\frac{۱}{۲} - ۱)$  کے پہلے لوکار تھی الگ الگ محسوب

کرائے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲)، (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستند شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لوک جب } \frac{\pi}{۲} = \text{لوک } \pi + \text{لوک } \frac{\pi}{۲} + \text{لوک } (۱ - \frac{\pi}{۲})$$

$$= \left\{ \left( \frac{۱}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right) \left( \frac{۱}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right) \right\}$$

$$\text{لوک جم } \frac{\pi}{2} = \text{لوک } (1 - \frac{1}{n}) - \left\{ \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} \right\} \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right\}$$

ان ساداتوں کی بائیں جانب کے لوکاتوں کو مقیاس ۹۳۳۲۹۴۴۸۱۹

سے ضرب دینے سے ہمیں جب  $(9 - \frac{1}{n})$  جم  $(9 - \frac{1}{n})$  کے معمولی لوکاتوں

اساس ۱۰ پر مائل ہوتے ہیں۔ اس طرح جو مضابطے ملتے ہیں وہ حسب ذیل ہیں:

$$= \text{لوک جب } (9 - \frac{1}{n})$$

$$\text{لوک } m + \text{لوک } (n - m) + \text{لوک } (n + m)$$

$$- \text{لوک } n + 93592.5988540219.$$

$$- m \setminus n \times 90.1590228266.5901$$

$$- m \setminus n \times 90.1114266441661$$

$$- m \setminus n \times 90.00039229126253$$

$$- m \setminus n \times 90.00001424240498$$

$$- m \setminus n \times 90.00000823629864$$

$$- m \setminus n \times 90.000000234815$$

$$- m \setminus n \times 90.000000043931$$

$$- m \setminus n \times 90.0000000012659$$

$$- m \setminus n \times 90.0000000000402$$

$$- m \setminus n \times 90.00000000000039$$

لج (م\ن ۰۹) =  
لوک (ن-م) + لوک (م+ن) - ۲ لوک ن

$$1 - 5 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots +$$

51-1292^09341^92x6\7-

5.0318292 - 45451 x 10<sup>10</sup> -

5...2-42151...14x6\7-

5 . . . . 1 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041

- م / فاشل ٨٤٩٣٩٠١٢٨٠٠٠٠٠٠٠

5 . . . . . 1 3 4 5 . 2 2 < 2 x 10<sup>12</sup> \ 10<sup>12</sup> -

5. . . . . 129 x 15 x 15 -

5. . . . . 1241421x<sup>12</sup>u<sup>12</sup> -

5. . . . . 122042x<sup>13</sup> \ <sup>14</sup> -

- ق م \ ن خ ه ي ا . . . . .

..... 150 x 10<sup>12</sup> / g -

..... ۱۲۸۵۰۰ -

..... 13x<sup>12</sup> 12<sup>12</sup> -

ان سلسلوں کو یوں لے کر افسانہ کے میں مقامات تک حاصل کیا تھا۔

## مثالیں

$$۳۰۱ - (۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (1-nr) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (1-nr) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (1-nr) \dots$$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ لوک جب لا} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \text{ لوک } (1 - \frac{r^n}{n})$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} =$$

$$\text{لوک جب لا} = \text{لوک } (1 - \frac{r^n}{n} + \frac{r^n}{n} - \dots)$$

$$= -(\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{n}) - (\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{n}) - \dots$$

(368) اسلئے لوک جب لا کے ان دو جملوں میں لا' لا کے سرورں کو مساوی رکھنے سے مائل ہوتا ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}$$

$$\text{پھر چونکہ لوک جم لا} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \text{ لوک } \{ \frac{r^n}{n} (1-nr) \}$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} =$$

$$\text{اور نیز لوک جم لا} = \text{لوک } (1 - \frac{r^n}{n} + \frac{r^n}{n} - \dots)$$

$$= -(\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{n}) - (\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{n}) - \dots$$

اس لئے لا اور لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\pi \frac{1}{96} = (1-02) \Sigma \quad \pi \frac{1}{8} = (1-02) \Sigma$$

(۲) لا متناہی سلسلہ  $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{3+4} + \dots$  کو جمع کرو۔

مسئلہ (۱۰) میں رکھو ۲ ی = خ لا  $\pi$ ، اس طرح اس سلسلہ کا مجموعہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi}{12} \text{ سنر } \frac{1}{4} \pi$$

یہ مجموعہ ۱۲ جز  $\pi$  کے اجزائے ضربی والے جملہ سے لوکار تم لینے اور تفرق کرنے سے بھی راست حاصل کیا جاسکتا تھا۔

(۳) ثابت کرو کہ ان تمام عددوں کے تنکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ  $\frac{15}{12}$  ہے

جو کسی مفرد عدد کے مربع سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ مفرد عددوں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹، ۲۲۵۱، ۲۲۵۳، ۲۲۵۵، ۲۲۵۷، ۲۲۵۹، ۲۲۶۱، ۲۲۶۳، ۲۲۶۵، ۲۲۶۷، ۲۲۶۹، ۲۲۷۱، ۲۲۷۳، ۲۲۷۵، ۲۲۷۷، ۲۲۷۹، ۲۲۸۱، ۲۲۸۳، ۲۲۸۵، ۲۲۸۷، ۲۲۸۹، ۲۲۹۱، ۲۲۹۳، ۲۲۹۵، ۲۲۹۷، ۲۲۹۹، ۲۳۰۱، ۲۳۰۳، ۲۳۰۵، ۲۳۰۷، ۲۳۰۹، ۲۳۱۱، ۲۳۱۳، ۲۳۱۵، ۲۳۱۷، ۲۳۱۹، ۲۳۲۱، ۲۳۲۳، ۲۳۲۵، ۲۳۲۷، ۲۳۲۹، ۲۳۳۱، ۲۳۳۳، ۲۳۳۵، ۲۳۳۷، ۲۳۳۹، ۲۳۴۱، ۲۳۴۳، ۲۳۴۵، ۲۳۴۷، ۲۳۴۹، ۲۳۵۱، ۲۳۵۳، ۲۳۵۵، ۲۳۵۷، ۲۳۵۹، ۲۳۶۱، ۲۳۶۳، ۲۳۶۵، ۲۳۶۷، ۲۳۶۹، ۲۳۷۱، ۲۳۷۳، ۲۳۷۵، ۲۳۷۷، ۲۳۷۹، ۲۳۸۱، ۲۳۸۳، ۲۳۸۵، ۲۳۸۷، ۲۳۸۹، ۲۳۹۱، ۲۳۹۳، ۲۳۹۵، ۲۳۹۷، ۲۳۹۹، ۲۴۰۱، ۲۴۰۳، ۲۴۰۵، ۲۴۰۷، ۲۴۰۹، ۲۴۱۱، ۲۴۱۳، ۲۴۱۵، ۲۴۱۷، ۲۴۱۹، ۲۴۲۱، ۲۴۲۳، ۲۴۲۵، ۲۴۲۷، ۲۴۲۹، ۲۴۳۱، ۲۴۳۳، ۲۴۳۵، ۲۴۳۷، ۲۴۳۹، ۲۴۴۱، ۲۴۴۳، ۲۴۴۵، ۲۴۴۷، ۲۴۴۹، ۲۴۵۱، ۲۴۵۳، ۲۴۵۵، ۲۴۵۷، ۲۴۵۹، ۲۴۶۱، ۲۴۶۳، ۲۴۶۵، ۲۴۶۷، ۲۴۶۹، ۲۴۷۱، ۲۴۷۳، ۲۴۷۵، ۲۴۷۷، ۲۴۷۹، ۲۴۸۱، ۲۴۸۳، ۲۴۸۵، ۲۴۸۷، ۲۴۸۹، ۲۴۹۱، ۲۴۹۳، ۲۴۹۵، ۲۴۹۷، ۲۴۹۹، ۲۵۰۱، ۲۵۰۳، ۲۵۰۵، ۲۵۰۷، ۲۵۰۹، ۲۵۱۱، ۲۵۱۳، ۲۵۱۵، ۲۵۱۷، ۲۵۱۹، ۲۵۲۱، ۲۵۲۳، ۲۵۲۵، ۲۵۲۷، ۲۵۲۹، ۲۵۳۱، ۲۵۳۳، ۲۵۳۵، ۲۵۳۷، ۲۵۳۹، ۲۵۴۱، ۲۵۴۳، ۲۵۴۵، ۲۵۴۷،

$$\frac{\dots + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + 1}{\dots + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + 1} = \dots$$

$$\frac{15}{2\pi} = \frac{2\pi \frac{1}{9}}{2\pi \frac{1}{9}} = 1$$

(۴) ایک لامتناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لامتناہی تعداد سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنہیں سے ہر ایک کا طول ۱ ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اس کا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کرو کہ تمام نقاط تقسیم سے اس نقطہ کے فاصلوں کے مستطیوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{\frac{1}{2}\pi^2}{1} \text{ جزر } \frac{\pi}{1}$$

(369) جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (n+1)^2}$  ہے جو

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2 + (n+2)^2} \right)$$

کے حاصل ہے۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\left\{ \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{1} \right\} = 0$$

$$\text{جب } \frac{1}{2}\pi^2$$

$$\frac{\pi}{1} \text{ جب } \frac{\pi}{1} \text{ جب } \frac{\pi}{1}$$

اور یہ مطلوبہ نتیجہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

## سترہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$ج\frac{1}{\pi} = (ج\frac{1}{\pi} + 1) \left( \frac{ج\frac{1}{\pi}}{2} + 1 \right) \left( \frac{ج\frac{1}{\pi}}{4} + 1 \right) \dots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$+ جب ل = \frac{1}{\pi} (ل + \pi) \left\{ \frac{1}{\pi} (ل + \pi) - 1 \right\} \left\{ \frac{1}{\pi} (ل + \pi) - 1 \right\} \dots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{(\infty + \pi)(\infty + \pi)} \dots \frac{1}{\infty + \pi} \dots \frac{1}{\infty + \pi}$$

جہاں م، ن، تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لامحدود صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1 + \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{\pi}\right) \dots}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{\pi}\right) \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{\pi}\right) \dots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1$$

$$\dots \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \dots$$

$$\dots \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \left( \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}} + 1 \right) \dots$$





۱۱۔ ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے شکافیوں کی  
چوتھی قوتوں کے مائل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{\pi^2}{9}$  ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi^2}{8} = \left( \dots + \frac{1}{5+4} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{1+0} \right) \left( \dots + \frac{2}{3+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{1+0} + 1 \right)$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\dots + \left( \frac{1}{5 \times 4 \times 3} \right) + \left( \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \right) + \left( \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \right)$$

کا مجموعہ  $\frac{\pi^2}{12}$  ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ

$$(1-m) = \frac{(1-m^2) \dots (1-m^{2n})}{\{ (1-m^2) - m^2 \} \dots \{ (1-m^{2n}) - m^{2n} \}}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\dots - \frac{5}{14+5} + \frac{3}{14+3} - \frac{1}{14+1}$$

کا مجموعہ  $\frac{\pi^2}{12}$  قطر  $\frac{\pi^2}{12}$  ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 \text{ لا} - \text{مس}^1 \text{ لا} + \text{مس}^1 \text{ لا} - \dots = \text{مس}^1 \text{ لا}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}^1 \text{ لا} - \text{لوک}^1 \text{ لا} + \text{لوک}^1 \text{ لا} - \dots = \text{لوک}^1 \text{ لا}$$



= (جزء ۱ + جزء ۲ - جزء ۳ + جزء ۴ - جزء ۵ + جزء ۶ - جزء ۷ + جزء ۸ - جزء ۹ + جزء ۱۰ - جزء ۱۱ + جزء ۱۲) =  
جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے -  
۲۲ - ثابت کر دو کہ

$$\dots + \frac{1}{12 \times 11 \times 10 \times 9} + \frac{1}{8 \times 7 \times 6 \times 5} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ کو } 2 - \frac{1}{24} \pi$$

$$\dots + \frac{1}{23 \times 21 \times 19 \times 17} + \frac{1}{15 \times 13 \times 11 \times 9} + \frac{1}{5 \times 3 \times 1}$$

$$= \frac{\pi}{(21+2)94}$$

۲۳ - اگر  $(x) = (x) + 1 = (x) + 1 = (x) + 1 = \dots = (x) + 1$  تو ثابت کر دو کہ

$$\text{مس } \frac{1}{1} + \text{مس } \frac{1}{2} + \text{مس } \frac{1}{3} + \dots = \text{مس } \frac{1}{j}$$

اور اسلئے ثابت کر دو کہ

$$\text{مس } \frac{1}{1} + \text{مس } \frac{1}{2} + \text{مس } \frac{1}{3} + \dots$$

$$= \text{مس } \left( \frac{\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi}{\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi} \right)$$

۲۴ - ثابت کر دو کہ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \pi \text{ جیب} + \sqrt{2} \pi \text{ جیز}}{\sqrt{2} \pi \text{ عم} - \sqrt{2} \pi \text{ مم}} \times \frac{\sqrt{2} \pi}{\sqrt{2} \pi} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad ۲۵ - \text{ثابت کرد}$$

$$\text{قم}^2 = \frac{1}{(\pi \text{ عم} + \sqrt{2})} \quad \begin{matrix} \infty = \text{عم} \\ \infty - \text{عم} \end{matrix}$$

۲۶ - ثابت کرد

$$\frac{\frac{\text{ب} + \text{لا}}{\text{ف}} + \frac{\text{لا} - \text{ج}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}} + \frac{\text{ف}}{\text{ف}}}$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب - ج) + \text{لا} + \text{لا}^2}{(\pi (ب - ج) + 1)} + 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^2 (ب - ج) + \text{لا} + \text{لا}^2}{(\pi (ب - ج) + 1)} + 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^2 (ب - ج) + \text{لا} + \text{لا}^2}{(\pi (ب - ج) + 1)} + 1 \right\} =$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب - ج) + \text{لا} + \text{لا}^2}{(\pi (ب - ج) + 1)} + 1 \right\} \left( \frac{\text{لا}^2}{ب - ج} + 1 \right) = \frac{\frac{\text{ب} + \text{لا}}{\text{ف}} - \frac{\text{لا} - \text{ج}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}} - \frac{\text{ف}}{\text{ف}}} \text{ اور}$$

$$\left\{ \frac{\pi^2 (ب - ج) + \text{لا} + \text{لا}^2}{(\pi (ب - ج) + 1)} + 1 \right\} \dots \dots \dots (\text{یو لری})$$

۲۷ - اگر

(372)

$$\frac{1}{\text{م} + \text{ع} ۵} - \frac{1}{\text{م} - \text{ع} ۵} + \frac{1}{\text{م} + \text{ع} ۳} - \frac{1}{\text{م} - \text{ع} ۳} + \frac{1}{\text{م} + \text{ع}} - \frac{1}{\text{م} - \text{ع}} = \text{ف}$$

$$\frac{1}{\pi^2 (\text{م} - \text{ع} ۵)} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} + \text{ع} ۳)} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} - \text{ع} ۳)} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} + \text{ع})} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} - \text{ع})} = \text{ق}$$

$$\dots + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} + \text{ع} ۳)} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} - \text{ع} ۳)} + \frac{1}{\pi^2 (\text{م} + \text{ع})} - \frac{1}{\pi^2 (\text{م} - \text{ع})} = \text{ص}$$

$$\dots + \frac{1}{2^n(m+3)} + \frac{1}{2^n(m-3)} + \frac{1}{2^n(m+5)} + \frac{1}{2^n(m-5)} = \text{س}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi^2}{2^n} = \text{ق} \quad \frac{\pi^2(2+k^2)}{2^n \times 2 \times 2} = \text{ک} \quad \frac{\pi^2(k^2+6)}{2^n \times 4 \times 2 \times 2} = \text{م}$$

$$\frac{\pi^2(8+k^2+2k^2)}{2^n \times 8 \times 2 \times 2 \times 2} = \text{س}$$

$$\text{جہاں} \quad \text{ک} = \text{س} \quad \frac{\pi^2}{2^n} \quad (\text{یو ل})$$

۲۸ - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} - 1$$

کا مجموعہ جس میں وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لے گئے ہیں  $\frac{\pi^2}{18} \times 36$  ہے۔ (یو ل)

۲۹ - ثابت کرو کہ ان سب عددوں کے شکائیوں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\pi^2}{24} \text{ ہے جو } ۳ \text{ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔}$$

۳۰ - ثابت کرو کہ

$$\left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\text{جنرل} + \text{جنرل}}{\text{جنرل}}$$

$$\dots \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots$$

$$\left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\text{جنرل} - \text{جنرل}}{1 - \text{جنرل}}$$

$$x \left( \frac{1 - 16j^2}{16j^2 + 1} \right) \dots \dots \dots (\text{یولر})$$

۳۱۔ ثابت کرو کہ جب 'ن طاق ہو تو

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi^2 (1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi^2 (1-n)}{n^2} + \dots + \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$x (n^2 - n - 13)$$

۳۲۔ ثابت کرو کہ لاستناہی حاصل ضرب

$$\dots \dots \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \pi^{1-n} (جزء \pi - لا + جم \pi \text{ بہ لا}) \text{ اگر ن جفت ہے}$$

$$\text{اور } = \frac{1}{n^2} \pi^{1-n} (جزء \pi - لا + جم \pi \text{ بہ لا}) \text{ اگر ن طاق ہے}$$

جہاں 'ع' ہر ملی الترتیب جب  $\frac{\pi}{n}$  'جم'  $\frac{\pi}{n}$  کو تبصیر کرتے ہیں اور 'ا' ایک طاق عدد ہے۔  
(گلیشیر)

۳۳۔ ثابت کرو کہ لاستناہی حاصل ضرب

$$\dots \dots \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right) \left( \frac{n^2}{n^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \pi^{1-n} (جزء \pi - لا - جم \pi \text{ بہ لا})$$

اگر ن جفت ہے اور

$$\frac{1}{\pi^{n-1} \Gamma_2} = \text{جنر } \pi \text{ لا } \pi^{n-1} \text{ (جنر } \pi \text{ لا - جم } \pi \pi \text{ بہ لا)}$$

اگر ن طاق ہے۔ عہ اور یہ کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال مابوق میں تھا۔

(گلشیر)

۳۴ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{1}{\pi_1 + \pi_2} + \frac{1}{\pi_2 + \pi_3} + \frac{1}{\pi_3 + \pi_4} + \dots$$

$$\frac{1}{\pi_1} - \frac{\pi}{\pi_1 - \pi} = \frac{\pi}{\pi_1 - \pi} - \frac{1}{\pi_1 - \pi} = \frac{\pi - 1}{\pi_1 - \pi}$$

جہاں عہ اور یہ کے وہی معنی ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلشیر)

۳۵ - ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} \right\}_{r=1}^{\infty} = \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} + \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2}$$

$$\left\{ \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} \right\}_{r=1}^{\infty} = \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} + \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2}$$

$$\pi = \text{جب } \pi \text{ (جم } \pi \text{ لا - جم } \pi \text{ لا - جم } \pi \text{ لا)}$$

$$\left\{ \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} \right\}_{r=1}^{\infty} = \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2} + \frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi + \pi^2}$$



(374)

# اٹھارواں باب

## سلسل کسریں

II کے غیر منطوق ہونی کا ثبوت

۳۰۲۔ فرض کرو کہ مستحق سلسلہ

$$-1 - \frac{لا^2}{ج \times 1} + \frac{لا^2}{ج \times 2 \times 1} - \frac{لا^2}{ج \times 3 \times 2 \times 1} + \dots$$

ف (ج) سے تعبیر ہوتا ہے تب

$$ف (ج) - (1 + ج) = \frac{لا^2}{ج (1 + ج)} \quad ف (2 + ج)$$

$$اس لئے \quad \frac{ف (ج)}{ف (1 + ج)} = 1 - \frac{لا^2}{ج (1 + ج)} \quad \frac{ف (2 + ج)}{ف (1 + ج)}$$

$$پس \quad \frac{ف (1 + ج)}{ف (2 + ج)} = \frac{لا^2}{ج (1 + ج)} \quad \frac{لا^2}{ج (2 + ج)} \quad \frac{لا^2}{ج (3 + ج)}$$

کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ ج =  $\frac{1}{p}$  اور لا کی بجائے  $\frac{1}{p}$  لاکھو تو سلسلہ ف (ج) ہو جائے



$$1 - \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{2 \times 4} - \dots$$

یا = حجم لا

اور ف (ج+۱) جب لا ہو جاتا ہے۔ پس

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

جو سس لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک مسلسل کسر ہے۔  
 سم ۲۰۔ لیمبرٹ کا وہ ثبوت ہے جو  $\pi$  کے غیر منطوق ہونے کے  
 متعلق ہے محض بالامسلل کسر پر منحصر ہے۔ رکھو لا =  $\frac{1}{\pi}$   
 اور بغرض امکان رکھو  $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{n}$  جہاں  $n$  اور  $n$  صحیح عدد ہیں۔

$$1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \dots$$

اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسروں  $\frac{1}{n}$ ،  $\frac{1}{n^2}$ ،  $\frac{1}{n^3}$ ، ...

(378)

کے نسب نما شمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں  
 جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ کی رو سے  
 مساوات کی بائیں جانب کی مسلسل کسر ایک غیر منطوق انتہا رکھتی  
 ہے اور اسلئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ پس  $\frac{1}{\pi}$  کسر  $\pi$   
 کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ  $n$  اور  $n$  صحیح عدد ہوں اور  
 اسلئے  $\pi$  غیر منطوق ہے۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱) کے پیچ تر

۱۷۱۷ء میں برلن اکاڈمی کی یادداشت میں شائع ہوا۔

۱۷۷۷ء دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴)۔

مسئلہ میں شامل ہے جو یہ ہے کہ  $\Pi$  ایک علوی عدد ہے۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ

۳۰۴۔ کسری  $\frac{1}{(1+a)^n}$  اور  $\frac{1}{(1+b)^n}$  کو جس میں  $a$  اور  $b$  علوی ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{a \times 1}{1 \times 1} + \frac{a \times (1+a)}{1 \times 2} + \frac{a \times (1+a)^2}{1 \times 3} + \dots$$

کو تعبیر کرتا ہے مسل کسری

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} - \frac{1}{1-a^4} + \dots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)(1+a)} = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{(1-a^2)(1+a^2)} = \frac{1}{1-a^4}$$

$$\dots, \frac{1}{1-a^{2n}} = \frac{1}{(1-a^{2n})(1+a^{2n})} = \frac{1}{1-a^{4n}}$$

$$\frac{1}{1-a^{4n}} = \frac{1}{(1-a^{4n})(1+a^{4n})} = \frac{1}{1-a^{8n}}$$

$$\frac{1}{1-a^{8n}} = \frac{1}{(1-a^{8n})(1+a^{8n})} = \frac{1}{1-a^{16n}}$$

اس استحالہ کا فائدہ تشریل ذیل سے ظاہر ہوگا۔ سلسلہ

$$نہ = جب نہ جم نہ \left\{ 1 + \frac{2}{3} جب نہ + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} جب نہ + \dots \right\}$$

لو اور ضابطہ بالا میں رکھو عہ = ا' بہ = ا' جہ = ا' لا = جب نہ تو

$$نہ = \frac{جب نہ جم نہ}{-1} = \frac{\frac{2 \times 1}{3 \times 1} جب نہ}{-1} = \frac{\frac{2 \times 1}{5 \times 3} جب نہ}{-1} = \frac{\frac{2 \times 2}{5 \times 3} جب نہ}{-1} = \dots$$

اس کے دوسرے مستحق سے نہ کیلئے اسنیلیس (Snellius) کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$نہ = \frac{جب نہ جم نہ}{-1 + \frac{1}{3} جب نہ} = \frac{2 جب نہ}{(2 + 2 جب نہ)^2}$$

یولر کا استحالة

۵۔۳۔ یولر کے مسئلہ

(376)

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

کے ذریعہ جسکو اس شکل

$$\dots + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = \dots + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے دیگر سلسلے ستیل ہو سکتے ہیں۔

۷۔ دیکھو مسئلہ الجبر جلد دوم صفحہ ۸۷۔

اس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{n} \text{ م } \frac{\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-3} + \frac{1}{m-4} - \frac{1}{m-5} + \dots$$

سے مسئلہ

$$\frac{\pi}{n} \text{ م } \frac{\pi}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-3} + \frac{1}{m-4} - \frac{1}{m-5} + \dots$$

ماہل کیا جا سکتا ہے۔

## اٹھارویں باب پر مثالیں

مثلاً (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$$

جہاں  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$  اور  $n$  پر کوئی قید نہیں ہے۔

$$3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$$

$$\dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & ۴ - \text{مسئله} = \frac{\text{ن} \text{سن} \text{لا}}{-۱} \frac{(\text{ن} - ۱) \text{سن} \text{لا}}{-۳} \frac{(\text{ن} - ۲) \text{سن} \text{لا}}{-۵} \dots \\
 & ۵ - \text{مسئله} = \frac{\text{لا}}{+۱} \frac{\text{لا}^۲}{+۳} \frac{\text{لا}^۳}{+۵} \dots \\
 & ۶ - \text{مسئله} = \frac{\text{لا}}{+۱} \frac{\text{لا}^۲}{+۳} \frac{\text{لا}^۳}{+۵} \dots \\
 & ۷ - \text{مسئله} = \frac{\text{لا}}{+۱} \frac{\text{لا}^۲}{+۳} \frac{\text{لا}^۳}{+۵} \dots \\
 & ۸ - \text{مسئله} = \frac{\text{ن} \text{سن} \text{لا}}{-۱} \frac{(\text{ن} + ۱) \text{سن} \text{لا}}{-۳} \frac{(\text{ن} + ۲) \text{سن} \text{لا}}{-۵} \dots \\
 & ۹ - \frac{\pi}{\text{ن}} \text{قم} \frac{\pi}{\text{ن}} = +۱ \frac{۱}{+۱ - \text{ن}} \frac{(\text{ن} - ۱) \text{ن}}{+۱} \frac{(\text{ن} + ۱) \text{ن}}{+۱ - \text{ن}} \dots \\
 & \dots \frac{\text{ن}^۲(۱ - \text{ن})}{+۱} \dots \\
 & ۱۰ - \frac{\text{جب} \frac{\pi}{\text{لا}}}{\frac{\pi}{\text{لا}}} = +۱ \frac{\text{لا}}{-۱} \frac{\text{لا} + ۱}{-۱} \frac{\text{لا} - ۱}{-۱} \frac{(\text{لا} + ۲) \text{لا}}{-۱} \dots \\
 & \dots \frac{(\text{لا} - ۲) \text{لا}}{-۱} \dots \\
 & ۱۱ - \frac{\text{جم} \frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}} = +۱ \frac{\text{لا}}{-۱} \frac{\text{لا} + ۱}{-۱} \frac{\text{لا} - ۱}{-۱} \frac{(\text{لا} + ۳) \text{لا}}{-۱} \dots \\
 & ۱۲ - \frac{\text{م} \frac{۱}{\text{لا}}}{\frac{۱}{\text{لا}}} = \frac{۱}{+۱ - \text{لا}} \frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۲ - \text{لا}} \frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۲ - \text{لا}} \dots \\
 & ۱۳ - \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \dots \\
 & \dots \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{\text{جب} \frac{۲\pi}{۳}}{\frac{۲\pi}{۳}} \dots
 \end{aligned}$$

## متفرق مثالیں

(۱۷۸)

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم م لا} - \text{جم م ع}}{\text{جم لا} - \text{جم م}} = \text{تم م} \left\{ \text{جب م ع جم (م-۱)} + \text{لا} + \text{جب م ع جم (م-۲)} + \dots \right\}$$

$$+ \dots + \text{جم لا} + \text{جب م ع} \left\{ \begin{array}{l} \text{جم لا} \\ \text{جم م} \end{array} \right\}$$

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور  $\frac{ک}{ن}$  تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب م لا}}{\text{جب ن لا}} = \frac{۱}{ن} \pm (۱ - \text{ک جب م ع م لا م})$$

اور نیزہ غلط

$$= \frac{۱}{ن} \pm (۱ - \text{ک جب م ع م لا م})$$

$$= \frac{۱}{ن} \pm (۱ - \text{ک جب م ع م لا م})$$

بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو۔  
۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم (لا-ع) جم (لا-ب) ... جم (لا-ل)} = \text{جم (لا-ع) جم (لا-ب) ... جم (لا-ل)}$$

$$= \text{جم (لا-ع) جم (لا-ب) ... جم (لا-ل)}$$

(جہاں ل = جم (لا-ع) جم (لا-ب) ... جم (لا-ل))



$$م^1 (1 + \frac{2}{n}) + م^2 (2 + \frac{3}{n}) + م^3 (3 + \frac{4}{n}) + \dots$$

کا مجموعہ  $م^1$  ہے۔  
 اگر  $8 -$  مس اقطاب + مس ب قط  $ا =$  مس ج  
 تو ثابت کرو کہ مس اقط  $ا +$  مس ب قطب + مس ج قطح  
 $+ 2$  مس اس ب مس ج  $= 0$   
 اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب  $ا$  جم  $ا +$  جب ب جم  $ب +$  جب ج جم  $ج -$  جب ا جب ب جب ج  $=$   
 کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو کہاں  $ا$  ب  $ج$  ایک  
 مثلث کے زاوے ہیں۔  
 ۹ - اگر  $م$  اور  $ن$  کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$جب لا \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(n+m)(n+1+m)} \right\} \frac{1}{2}$$

$$+ \left\{ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+m)(n+1+m)(n+2+m)(n+3+m)} \right\} \frac{1}{4}$$

$$= (n+m)(n+1+m)(n+2+m) \left\{ \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+1+m} \right\}$$

$$+ \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+m)(n+1+m)(n+2+m)(n+3+m)} \left\{ \dots \right\}$$

۱۰ - ثابت کرو کہ



جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)

۱۱- ثابت کرو کہ مقطع

جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)
جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)	جم (ع+ب)

$$= م [ح جب (ا+س+لا)] \{ ا جب \frac{1}{2} (ا-ب) \}$$

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور س =  $\frac{1}{2} (ا+ب+ج+د)$   
۱۲- اگر

$$جم (ا-لا-ما-ی) جب (ا-ی) + جم (ا-ما-ی-لا) جب (ی-لا) + جم (ا-ی-لا-ما) جب (لا-ما) = ۰$$

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں  $\pi$  کے نصف کا فرق نہ ہو تو

۱۳- اگر منفر اور  $\pi$  کے درمیان طہ کی دو قیمتیں ہوں اور ضہ ہوں جو مساوات

جب  $\frac{1}{2} ط (ع+ب) + جب \frac{1}{2} ط (ب+ع) + جب \frac{1}{2} ط (ع+ب) = ۰$   
کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ ع اور ب اس مسافت

$$\text{جب } ۲ \text{ ذہ } ۲ \text{ جم } (جہ + ضہ) + \text{جب } ۲ \text{ جہ } ۲ \text{ جم } (ضہ + ذہ) + \text{جب } ۲ \text{ ضہ } ۲ \text{ جم } (جہ + ضہ) = (ذہ +$$

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴۔ اگر مس  $\frac{ط}{۲}$  کی تین معادلہ قیمتیں مس ع، مس ب، مس ج ہوں جبکہ مس ط دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ جم ع جم ب جم ج } (ع + ب + ج) + \text{جب ع جب ب جب ج } (جہ + ضہ + ذہ) =$$

$$= (جہ + ب + ج) =$$

$$(۲) \text{ جب (ب + ج) جب (جہ + ع) جب (ع + ب) } =$$

$$= \text{جب } ۲ \text{ ع جب } ۲ \text{ ب جب } ۲ \text{ ج}$$

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب } (ب - ج) \text{ جم } \frac{جہ + ع}{۲} \text{ جم } \frac{ع + ب}{۲} \text{ جب } \frac{۲ + ۳ + ۴}{۲} =$$

$$\text{جب } (ج - ب) \text{ جم } \frac{جہ + ع}{۲} \text{ جم } \frac{ع + ب}{۲} \text{ جب } \frac{۲ + ۳ + ۴}{۲} =$$

$$= \text{جب } ۲ (ع + ب + ج) + \text{جب } ۳ (جہ + ضہ + ذہ) =$$

$$\text{جم } ۲ (ع + ب + ج) + \text{جم } ۳ (جہ + ضہ + ذہ) =$$

جہاں عمل جمع ۳ اس مجموعہ کو تغییر کرتا ہے جو زاویوں ع، ب، ج

کا باہمی دائری متبادلہ سے بنتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر

$$= ۱ + \frac{۲ \text{ جم } ط}{+۱} + \frac{۲ \text{ جم } \frac{ط}{۲}}{+۱} + \frac{۲ \text{ جم } \frac{ط}{۲}}{+۱} + \dots$$

تو ع کی بجائے و کا ن واں مستحق لینے سے جو خط واقع ہوتی ہے وہ ہے

$$۲(۱-۲)$$

$$۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰-۲۱-۲۲-۲۳-۲۴-۲۵-۲۶-۲۷-۲۸-۲۹-۳۰-۳۱-۳۲-۳۳-۳۴-۳۵-۳۶-۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱-۴۲-۴۳-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۰-۵۱-۵۲-۵۳-۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۵۸-۵۹-۶۰-۶۱-۶۲-۶۳-۶۴-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸-۶۹-۷۰-۷۱-۷۲-۷۳-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۸-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۶-۸۷-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳-۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰$$

۱۷- ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{1}{1-2} + \frac{1}{2-3} + \frac{1}{3-4} + \frac{1}{4-5} + \dots + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

کا مجموعہ ہے  $\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$

۱۸- ثابت کرو کہ مساوات  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  کی خیالی اصلیں نہیں ہو سکتیں تا آنکہ  $\theta > 1$  جہاں  $\theta$  حقیقی ہے، اور اگر  $\theta > 1$  تو اس کی دو اصلیں خیالی ہوں گی۔

۱۹- ثابت کرو کہ کسی تین خطوط مستقیم  $a, b, c$  کے ضد توازی (Anti parallels)  $a, b, c$  کے گزرنے والے نقطہ پر ملے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ اگر  $a, b, c$  کے ملنے والے نقطہ پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے چھ نقاط پائیں ایک دایرے پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر مرکز ہندسی  $O$  سے ضلعوں  $BC, CA, AB$  پر عمود  $D, E, F$  گرائے جائیں ہوں اور دائرہ  $DEF$  کے قیام پر کوئی نقطہ  $P$  ہو تو ثابت کرو کہ

$$(P+O)^2 = (P+B)^2 + (P+C)^2 + (P+A)^2 + (P+O)^2$$







اس کے زاویوں کے مماثل علی الترتیب

ج ۲ ۱/۲ (ج ۱ + ب ۱/۲ + ج ۱/۲ - ج ۱/۲ - ب ۱/۲ - ج ۱/۲ - ج ۲ ۱/۲)

۱-  $\frac{1}{4}$  ج -  $\frac{1}{4}$  ب -  $\frac{1}{4}$  ج +  $\frac{1}{4}$  ب +  $\frac{1}{4}$  ج

اور دو متضادہ جملوں کے مساوی ہیں۔

۳۔ اگر لایک صحیح عدد نہ ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{n + m + l}{r(n+l)r(m+l)} = 3$$

میں میں م اور ن کو ہر ممکن طریقہ سے غیر مساوی قیمتیں (جو ع اور ع کے درمیان صفر یا صحیح عدد ہوں) دی گئی ہیں معدوم ہوتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا بڑا دیا جائے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ جب  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  کے درمیان  $\vec{c}$  کے لیے جو اس شکل

جیب (م+ن) ط + جیب (م+ن-۲) ط + جیب (م+ن-۴) ط + ...

میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں م اور ن مثبت صیغے عدد ہیں۔  
نیز ثابت کرو کہ

$$(ف+۲) \frac{1}{۲+۱} + (م-ن) \frac{1}{۱+۱} + (م+ن-ف) \frac{1}{۱} = ۰$$

سوائے سلسلہ کی آخری رقموں کی صورت کے جبکہ م اور ن دونوں  
جیفٹ ہوتے ہیں۔

۳۲۔ ایک دائرہ کے محیط کو جب کا مرکز وہ ہے جس سے مساوی دوری نقطوں 'ف' 'ف' 'ف' پر تقسیم کیا گیا ہے اور ق کوئی اندرون

نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

سرفق و + سرفق و + ...

+ ... سرفق و = ن سرفق و

جہاں ف، دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ ق وف = ن

x ق وف، اور ق و پر ق ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر میں

ق و را، ق و را، دائرہ کو را، را میں قطع کریں) ق و را = ن x

ق و را -

۳۳ - اگر م، م، ...، م اس وہ صحیح عدد ہوں جو م سے

(383)

مجموعے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف

مفرد اجزائے ضربی ف، فم، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب } م \text{ ط} \times \text{جب } \Pi \text{ ف} \text{ ط} \times \text{جب } \Pi \text{ ف} \text{ م} \text{ ط}}{\text{جب } \Pi \text{ ف} \text{ م} \text{ ط} \times \text{جب } \Pi \text{ ف} \text{ م} \text{ ط} \times \text{جب } \Pi \text{ ف} \text{ م} \text{ ط}} = \left( \frac{\Pi}{م} + \frac{\Pi}{م} \right)$$

۳۴ - ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو

ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = م جبکہ م ≤ ۳ ثابت کرو کہ

مائل ضربوں جب ف ع جب ق (ع +  $\frac{\Pi}{۳}$ ) جب ر (ع +  $\frac{\Pi}{۳}$ )

کا مجموعہ منفرد ہے سوائے اس صورت کے جبکہ م، م کا ضعف ہو اور

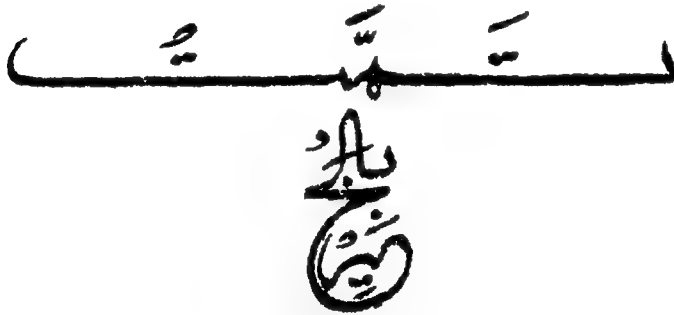


یہ مجموعہ -  $\frac{1}{p}$  جب  $s$  سے ہے جبکہ  $s$  کا ایک ضمیمہ ہو -  
۳۵ - اگر  $\lambda =$  مس ۲ طہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{\lambda}{2} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} + \dots \right\}$$

$$\text{جب طہ} = \frac{\lambda}{2} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^4}{128} - \frac{\lambda^6}{1024} + \dots \right\}$$

$$۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{32} + \frac{\lambda^4}{2048} - \dots \right\}$$



$$\frac{484}{92}$$

# اصطلاحات علم مثلث مستوی

Absolutely convergent

مطلقاً مستدق

Ambiguity of sign

علامت کا ابہام

Ambiguous sign

بہم علامت

Analytical

تحلیلی

Argument

وسیلہ وجہ

Base

اساس قاعدہ

Centroid

مرکز ہندسی

Circle of convergence

استدقاق کا دائرہ

Circular functions

دائری تفاعل

Circular measure

دائری ناپ

Circum-circle

حاطہ دائرہ بیرونی دائرہ

Circumscribed polygon

حاطہ کثیر الاضلاع

Complex number

مکعب عدد

Complex variable

مکعب متغیر

Conditionally convergent

مشروطاً مستدق

Continuous functions

مسلل تفاعل

Convergence	استدقاق
Coterminal angles	ہم اختتامی زاوے
Depression (angle of)	(زاویہ) ثیب
Doubly periodic	دو دوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوگارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جمنز)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جبنز)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی تماس (منز)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی تماس التمام (جمنز)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطر)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمنز)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متنائے
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لا مساوی
Infinite products	لا متناہی حاصل ضرب
Infinite series	لا متناہی سلسلہ

Inscribed polygon	اندرونی کثیرالاضلاع
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Internal bisectors	اندرونی ناصف
Inverse circular functions	مقلوب دائری تفاعل
Irrational	غیر منطوق
Lateral	جانبی
Limit	انتہا
Limits	حدود
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Minute	دقیقہ
Modulus	مقیاس
Multiple angles	ضعفی زاوے
Natural circular functions	طبعی دائری تفاعل
Natural logarithms	طبعی لوکارتم
Necessary and sufficient condition	ضروری اور کافی شرط
Nine-point circle	نو نقطی دائرہ
Oblique-angled triangle	غیر قائم الزاویہ مثلث
Odd functions	طاق تفاعل
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Partial fractions	جزوی کسور
Pedal line	خط پائین
Pedal triangle	مثلث پائین
Period	دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	مدر قیمت
Projection	فصل
Quadrature of the circle	دائرہ کی تربیع
Radian	نیم قطری
Radius of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Radius vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	مقنن کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضعیفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	متشاکل تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق

